

## Производная многочлена

1. Докажите, что многочлен  $P(x)$  степени  $n > 1$  имеет кратный корень тогда и только тогда, когда  $P(x)$  и  $P'(x)$  имеют общий корень.
2. Многочлен четвертой степени  $P(x)$  имеет четыре корня, попарные расстояния между которыми не меньше 1. Докажите, что найдутся два корня  $P'(x)$ , находящиеся на расстоянии не меньше 1.
3. Докажите, что при всех натуральных  $n$  у многочлена  $1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/n!$  не более одного вещественного корня.
4. Многочлен  $P(x)$  с вещественными коэффициентами степени  $n$  имеет  $n$  различных вещественных корней. Какое максимальное число коэффициентов этого многочлена могут быть нулевыми?
5. Известно, что многочлен  $P(x)$  степени  $n$  имеет ровно  $n$  различных нулей на отрезке  $[0; 1]$ , причём  $P(0) = P(1) = 0$ . Найдите множество всех возможных значений максимального нуля производной многочлена  $P(x)$  (т. е. максимального из таких чисел  $a$ , что  $P'(a) = 0$ ).
6. Существует ли пара многочленов с целыми коэффициентами  $P(x)$  и  $Q(x)$  степени выше первой, удовлетворяющих тождеству

$$P(Q(x)) = x^{3375} + 3375x^{3374} + 2x + 1?$$

7. Докажите, что при любом натуральном  $n > 1$  уравнение  $x = \left( \frac{1-(1-x^2)^n}{1-(1-x)^n} \right)^2$  имеет на интервале  $(0; 1)$  единственное решение.