Разнобой по теории чисел: решения задач 1–5.

1. При каких n существуют натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

Ответ: При любом натуральном n.

Решение 1. Индукция по n. База: $n = 1, 2$ – ясно. Переход от n к $n + 1$:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2$$

$$(5a_1)^2 + (5a_2)^2 + \dots + (5a_n)^2 = (5b)^2$$

$$(3a_1)^2 + (4a_1)^2 + (5a_2)^2 + \dots + (5a_n)^2 = (5b)^2$$

Решение 2. Присвоим $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ какие угодно значения, лишь бы выполнялось условие $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 \not\equiv 2 \pmod 4$. Теперь существование решения следует из такого утверждения:

Лемма. Любое натуральное число, не сравнимое с 2 по модулю 4, представляется в виде разности двух точных квадратов.

Доказательство. $2m + 1 = (m + 1)^2 - m^2$; $4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$.

2. Последовательность $a_1, a_2, \dots$ задана соотношениями:

$$a_1 = 10,\ a_2 = 33,\ a_{i+2} = a_i + 3a_{i+1}\ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Найдётся ли в этой последовательности член, делящийся на 43?

Положим $a_0 = a_2 - 3a_1$, $a_{-1} = a_1 - 3a_0$, $a_{-2} = a_0 - 3a_{-1}$. Мы встретили ноль: $a_0 = 3$, $a_{-1} = 1$, $a_{-2} = 0$. Это удача!

Теперь всё получается из следующего классического рассуждения про периодичность. Последовательность пар остатков $a_i \pmod{43}$, $a_{i+1} \pmod{43}$ $(i \geqslant -2)$ периодична (так как по каждой паре однозначно вычисляется следующая, а всего пар конечное число, и значит, в какой-то момент появится пара, которая уже была). Более того, эта последовательность периодична без предпериода, так как по каждой паре однозначно вычисляется предыдущая. При $i = -2$ имеем пару $(0, 1)$, в силу периодичности без предпериода эта же пара встретится ещё бесконечно много раз. В частности, найдётся такое $i > 0$, что $a_i \equiv 0 \pmod{43}$, что и требовалось.

Замечание. Мы на самом деле получили, что для любого натурального m в последовательности (a_i) найдётся бесконечно много членов, делящихся на m.

3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ делится на $(n-1)!$

Решение 1. Достаточно доказать, что любое простое p входит в $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ в не меньшей степени, чем в $(n-1)!$. Для этого достаточно отыскать такой индекс i, что среди множителей, входящих в произведение

$$(a_i - a_1)(a_i - a_2)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n),$$

хотя бы $[(n-1)/p^k]$ штук делятся на p^k при всех $k \in \mathbb{N}$ (тогда побеждаем в силу формулы Лежандра). Среди чисел a_i можно выбрать не менее n/p штук, дающих одинаковый остаток по модулю p. Среди выбранных – не менее n/p^2 штук, делящихся на p^2 и т. д. Продолжая этот процесс, мы получаем цепочку вложенных подмножеств a-шек, k-е подмножество в этой цепочке имеет порядок не меньше n/p^k. Эта цепочка имеет непустое пересечение, пусть a_i лежит в этом пересечении. Тогда i – это и есть искомый индекс. В конце мы воспользовались таким наблюдением: $[(n-1)/p^k] \leqslant \lceil n/p^k \rceil - 1$.

Решение 2. Пусть $p(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$. Имеет место такое свойство: $p(x)$ делится на $(n-1)!$ при всех целых x. Напишем интерполяционную формулу Лагранжа в узлах $a_1, a_2, \dots, a_n$ для многочлена $p(x)$: И затем приравняем в ней старшие коэффициенты. Получаем $1 = \sum p(a_i)/b_i$. Справа все числители делятся на $(n-1)!$, а значит, общий знаменатель $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ также делится на $(n-1)!$.

4. Чему равна сумма всевозможных произведений чётного количества дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}\ ?$$

(В каждом произведении все дроби различны.)

Решение. Рассмотрим произведения $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)$ и $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)$. Что будет, если раскрыть в них скобки? Что будет, если рассмотреть их полусумму?...

Пусть $n = 99$, $x_i = \frac{1}{i+1}$. Получаем, что число, которое требуется найти в задаче, равно $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{101}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \frac{99}{100}\right)$. Вычисляем это и получаем ответ $\frac{5051}{200}$.

Замечание. Мы считаем, что произведение нуля сомножителей (равное единице) тоже присутствует в искомой сумме. Это довольно естественно.

5. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $51^k - 17$ делится на 2^n.

Решение 1. Лемма. Для любого натурального $n \geqslant 3$ найдётся натуральное l, такое что $\nu_2(51^l - 1) = n$.

Доказательство. Индукция по n. База индукции: $n = 3$. Годится $l = 2$. Переход индукции. Если $\nu_2(51^l - 1) = n$, то $\nu_2(51^{2l} - 1) = \nu_2(51^l - 1) + \nu_2(51^l + 1) = n + 1$. Лемма доказана.

Утверждение задачи тоже доказываем индукцией по n. База: $51^2 - 17$ делится на $2^3 = 8$. Переход. Пусть $51^k - 17$ делится на 2^n. Хотим добиться делимости на 2^{n+1}. Пусть l таково, что $\nu_2(51^l - 1) = n$. Можем считать, что $51^k - 17$ не делится на 17, а также что $k > l$. Тогда рассмотрим разность $(51^k - 17) - 51^{k-l} \cdot (51^l - 1) = 51^{k-l} - 17$. Так как оба числа $(51^k - 17)$ и $51^{k-l} \cdot (51^l - 1)$ делятся на 2^n и не делятся на 2^{n+1}, то $51^{k-l} - 17$ делится на 2^{n+1}.

Решение 2. Покажем, что 2^{n-2} является показателем числа 51 по модулю 2^n (при условии $n \geqslant 3$). Этот показатель является делителем числа $\phi(2^n) = 2^{n-1}$, т.е. является степенью двойки. Но при любом натуральном s верно $\nu_2(51^{2^s} - 1) = s + 2$ [1]. Значит, показатель в самом деле равен 2^{n-2}.

Таким образом, степени числа 51 пробегают ровно четверть всевозможных остатков по модулю 2^n. Но по модулю 8 эти степени могут давать лишь остатки 1 и 3, а значит, степени числа 51 пробегают все остатки по модулю 2^n, дающие 1 или 3 по модулю 8. В частности, остаток 1 тоже пробегают.

[1] На самом деле индукция из леммы ровно это и устанавливает. Другой способ доказать это – применить ЛОУП, представив 51^{2^s} как $(51^2)^{2^{s-1}}$. («В лоб» применить ЛОУП нельзя, так как $51 - 1$ не делится на 4.)