

## Разнобой по ТЧ

1. При каких  $n$  существуют натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n, b$  такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

2. Последовательность  $a_1, a_2, \dots$  задана соотношениями:

$$a_1 = 10, a_2 = 33, a_{i+2} = a_i + 3a_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Найдётся ли в этой последовательности член, делящийся на 43?

3. Даны различные натуральные числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное  $[b_1, b_2, \dots, b_n]$  делится на  $(n-1)!$

4. Чему равна сумма всевозможных произведений чётного количества дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}?$$

(В каждом произведении все дроби различны.)

5. Докажите, что для любого натурального  $n$  найдётся натуральное  $k$  такое, что  $51^k - 17$  делится на  $2^n$ .
6. Назовём число  $n$  *далёким от квадратов и кубов*, если для любого натурального  $k$  числа  $|n - k^2|$  и  $|n - k^3|$  больше миллиона. Докажите, что существует бесконечно много далёких от квадратов и кубов степеней двойки.