

Разнобой по ТЧ

1. При каких n существуют натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n, b такие, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = b^2.$$

2. Последовательность a_1, a_2, \dots задана соотношениями:

$$a_1 = 10, a_2 = 33, a_{i+2} = a_i + 3a_{i+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Найдётся ли в этой последовательности член, делящийся на 43?

3. Даны различные натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Положим

$$b_i = (a_i - a_1)(a_i - a_2) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n).$$

Докажите, что наименьшее общее кратное $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ делится на $(n-1)!$

4. Чему равна сумма всевозможных произведений чётного количества дробей

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}?$$

(В каждом произведении все дроби различны.)

5. Докажите, что для любого натурального n найдётся натуральное k такое, что $51^k - 17$ делится на 2^n .
6. Назовём число n *далёким от квадратов и кубов*, если для любого натурального k числа $|n - k^2|$ и $|n - k^3|$ больше миллиона. Докажите, что существует бесконечно много далёких от квадратов и кубов степеней двойки.