Соответствия

1. Рассмотрим всевозможные графы без петель и кратных рёбер на $n > 3$ пронумерованных вершинах [1]. Каких графов среди них больше: связных или несвязных?

2. Рассмотрим всевозможные перестановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Каких перестановок больше: тех, в которых 1 и 2 находятся в одном цикле или тех, в которых 1 и 2 находятся в разных циклах?

3. Докажите равенство, не используя рекуррент и индукции:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k C_{n-k}^k p^k q^k = \frac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q - p},$$

где p, q – неотрицательные числа с суммой 1.

4. Пусть n и k – натуральные числа одной чётности, причём $k \geqslant n$. Даны $2n$ лампочек, пронумерованных числами 1, 2, ..., $2n$. В любой момент времени каждая лампочка либо включена, либо выключена. Изначально все лампочки выключены. *Шагом* назовём смену состояния ровно одной из лампочек.

Обозначим через N число последовательностей из k шагов, в результате которых все лампочки с номерами от 1 до n включены, а все лампочки с номерами от $n + 1$ до $2n$ выключены.

Обозначим через M число последовательностей из k шагов, в результате которых все лампочки с номерами от 1 до n включены, все лампочки с номерами от $n + 1$ до $2n$ выключены и при этом все лампочки с номерами от $n+1$ до $2n$ ни разу не меняли своего состояния.

Найдите отношение N/M.

5. В этой задаче изучаются деревья на n пронумерованных вершинах. Определим *Код Прюфера* такого дерева как последовательность длины $n-2$ над алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$, построенную по следующей процедуре. Ищем в дереве висячую вершину с наименьшим номером, удаляем её и добавляем в последовательность номер её единственного соседа. С оставшимся деревом повторяем ту же операцию и т.д. Заканчиваем в тот момент, когда остаётся одно ребро.

Цель – доказать, что таким образом получается биекция между деревьями на n пронумерованных вершинах и последовательностями длины $n-2$ над алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$. Из этого в частности следует *теорема Кэли*, которая гласит, что число всевозможных деревьев на n пронумерованных вершинах равно n^{n-2}.

[1] Например, на трёх пронумерованных вершинах есть ровно восемь различных графов.

(a) Вам показали код Прюфера некоторого дерева, но не показали само дерево. Как узнать степени вершин дерева?

(b) Постройте какое-нибудь дерево с кодом Прюфера $(1, 1, 2, 5, 4, 5, 8)$.

(c) Докажите, что если у двух деревьев совпадает код Прюфера, то и сами деревья совпадают.

(d) Докажите, что каждая последовательность длины $n-2$ над алфавитом $\{1, 2, \dots, n\}$ является кодом Прюфера некоторого дерева.

Просто хорошие задачи

6. Докажите, что при любом натуральном n число $n!$ обладает свойством: к любому его делителю, отличному от самого $n!$, можно прибавить такой делитель $n!$, что сумма снова будет делителем $n!$.

7. Назовём многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами *маленьким*, если $|f(n)| < 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?