Идея линейности

1. По кругу стоят 512 целых числа. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут чётными. *Подсказка: сначала рассмотрите случай с одной единицей и остальными нулями.*

2. По окружности расставлены $p > 2$ целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2020}, если за ход из каждого числа вычитается его:
(a) левый сосед; **(b)** k-ый сосед слева, k фиксировано;
(c) k-ый сосед слева, k может меняться от хода к ходу.

3. Есть вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

4. В вершинах правильного 1001-угольника стоят нули. За один ход разрешается выписать на доску целое число $1 \leqslant k \leqslant 500$, выбрать любую вершину многоугольника, прибавить к числу в ней 2, а из чисел, стоящих в вершинах, отстоящих от выбранной по часовой и против часовой стрелки на k, вычесть по 1. Через несколько ходов в вершинах вновь оказались нули. Докажите, что сумма квадратов выписанных на доску чисел кратна 1001.

5. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

Просто хорошие задачи

6. На столе в ряд лежат 2020 монет орлом вверх. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается перевернуть 50 подряд идущих монет, если самая левая из них до переворачивания лежала орлом вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

7. 1000 монет разложены на 10 куч. Играют двое. Первый своим ходом выбирает 4 кучи и делит каждую из них на правую и левую (возможно, пустые). После этого второй нетождественно переставляет левые кучи и соединяет их с правыми обратно. В любой момент вместо своего хода первый может забрать любые три кучи и прекратить игру. Какое наибольшее число монет может гарантировать себе первый?

8. Найдите все пары многочленов $P(x), Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для всех натуральных n выполняется равенство $P(1)P(2)\ldots P(n) = Q(n!)$.

[ЦПМ, кружок по математике, 11 класс] Афризонов Д., Соколов А., Тихонов Ю.

[*2020-2021*] группа: 11 *24 сентября 2020 г.*

Идея линейности

1. По кругу стоят 512 целых числа. За один ход все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через несколько ходов все числа станут чётными. *Подсказка: сначала рассмотрите случай с одной единицей и остальными нулями.*

2. По окружности расставлены $p > 2$ целых чисел (p — простое). Докажите, что через несколько ходов все числа будут делиться на p^{2020}, если за ход из каждого числа вычитается его:
(a) левый сосед; **(b)** k-ый сосед слева, k фиксировано;
(c) k-ый сосед слева, k может меняться от хода к ходу.

3. Есть вещественные числа $a_1, \ldots, a_n$, среди них ровно два одинаковых. Напишите выражение от $a_1, \ldots, a_n$, значение которого равно этим одинаковым числам.

4. В вершинах правильного 1001-угольника стоят нули. За один ход разрешается выписать на доску целое число $1 \leqslant k \leqslant 500$, выбрать любую вершину многоугольника, прибавить к числу в ней 2, а из чисел, стоящих в вершинах, отстоящих от выбранной по часовой и против часовой стрелки на k, вычесть по 1. Через несколько ходов в вершинах вновь оказались нули. Докажите, что сумма квадратов выписанных на доску чисел кратна 1001.

5. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью. Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.

Просто хорошие задачи

6. На столе в ряд лежат 2020 монет орлом вверх. Двое играют в игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается перевернуть 50 подряд идущих монет, если самая левая из них до переворачивания лежала орлом вверх. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?

7. 1000 монет разложены на 10 куч. Играют двое. Первый своим ходом выбирает 4 кучи и делит каждую из них на правую и левую (возможно, пустые). После этого второй нетождественно переставляет левые кучи и соединяет их с правыми обратно. В любой момент вместо своего хода первый может забрать любые три кучи и прекратить игру. Какое наибольшее число монет может гарантировать себе первый?

8. Найдите все пары многочленов $P(x), Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что для всех натуральных n выполняется равенство $P(1)P(2)\ldots P(n) = Q(n!)$.