Отборочная олимпиада на сборы

1. Докажите, что для любого простого $p > 2$ существует единственное натуральное n такое, что n^2+np является точным квадратом.

2. Найдите все тройки ненулевых действительных чисел (x, y, z) таких, что выполняются равенства

$$x + y^2 = z^3, \quad x^2 + y^3 = z^4, \quad x^3 + y^4 = z^5.$$

3. На окружности отмечена 2021 точка. Конь Юлий некоторые из них соединяет хордами. После этого Алёша Попович проделывает несколько следующих операций: он выбирает две хорды AC и BD, пересекающиеся по внутренней точке ($ABCD$ — выпуклый четырёхугольник), стирает одну из них и проводит отрезки AB, BC, CD, DA, если какие-то из них не проведены. После того, как Алёша закончит, он выплачивает Юлию столько золотых, сколько хорд осталось проведено в окружности. Какое наибольшее количество золотых может гарантировать себе Юлий вне зависимости от действий Алёши Поповича?

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На дуге AB описанной окружности треугольника ABD, не содержащей точку D, выбрана произвольная точка X. Лучи XA и CD пересекаются в точке Y. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CXY лежит на прямой, проходящей через D перпендикулярно AD.

5. Назовём число *кринжовым*, если его можно представить в виде суммы

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{100}},$$

где a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} — целые неотрицательные числа (не обязательно различные). Найдите наименьшее натуральное n такое, что никакое кратное n число не является кринжовым.