Отборочная олимпиада на сборы, решения

1. Докажите, что для любого простого $p > 2$ существует единственное натуральное n такое, что $n^2 + np$ является точным квадратом.

Решение. Обозначим полученный квадрат через k. Тогда $n(n+p) = k^2$. Рассмотрим два случая.

1. n делится на p. Пусть $n = p \cdot n_1$, тогда
$$pn_1 \cdot (pn_1 + p) = p^2 \cdot n_1(n_1 + 1)$$
является квадратом, то есть $n_1(n_1+1)$ является квадратом. Но произведение двух подряд идущих натуральных чисел не может быть квадратом, то есть такой случай невозможен.

2. n не делится на p. Тогда
$$(n, n+p) = (n, p) = 1.$$
Произведение двух взаимно простых чисел может быть квадратом, только если каждое из них является квадратом, откуда $n = a^2$, $n+p = b^2$ для некоторых натуральных a и b. Но тогда
$$(n+p) - n = p = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$
Поскольку p — простое число, то $a-b = 1$, $a+b = p$. Складывая, получаем $2a = p - 1$, откуда $n = a^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Очевидно, что это n подходит.

2. Найдите все тройки ненулевых действительных чисел (x, y, z) таких, что выполняются равенства
$$x + y^2 = z^3, \quad x^2 + y^3 = z^4, \quad x^3 + y^4 = z^5.$$

Ответ. $x = y = z = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Решение. Так как $z^3 \cdot z^5 = \left(z^4\right)^2$, то
$$(x+y^2)(x^3+y^4) = (x^2+y^3)^2 \ \Leftrightarrow\ xy^4 + x^3y^2 = 2x^2y^3 \ \Leftrightarrow\ xy^2(x-y)^2 = 0.$$
По условию $xy \neq 0$, откуда $x = y$. Тогда, с одной стороны, $x^2 + x^3 = z^4$, а с другой стороны, $x \cdot (x + x^2) = x \cdot z^3$, поэтому
$$z^4 = x \cdot z^3 \ \Leftrightarrow\ z^3(z - x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = z.$$
Таким образом, $x = y = z$ и
$$x + x^2 = x^3 \ \Leftrightarrow\ x^2 - x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

3. На окружности отмечена 2021 точка. Конь Юлий некоторые из них соединяет хордами. После этого Алёша Попович проделывает несколько следующих операций: он выбирает две хорды AC и BD, пересекающиеся по внутренней точке ($ABCD$ — выпуклый четырёхугольник), стирает одну из них и проводит отрезки AB, BC, CD, DA, если какие-то из них не проведены. После того, как Алёша закончит, он выплачивает Юлию столько золотых, сколько хорд осталось проведено в окружности. Какое наибольшее количество золотых может гарантировать себе Юлий вне зависимости от действий Алёши Поповича?

Ответ. $2 \cdot 2021 - 3 = 4039$.

Решение. Назовём хорды, соединяющие соседние точки на окружности *сторонами*, а остальные — *диагоналями.* В дальнейшем под тем, что хорды пересекаются, будет иметься в виду, что хорды пересекаются по внутренним точкам.

Будем решать аналогичную задачу для $n \geqslant 3$ числа отмеченных точек. Чтобы гарантировать себе $2n - 3$ золотых, Юлию достаточно соединить соседние точки на окружности и у полученного многоугольника построить триангуляцию. Тогда Алёша Попович не сможет сделать ни одного действия, и Юлий получит $n + (n - 3) = 2n - 3$ золотых.

Докажем индукцией по n, что Алёша Попович может оставить не больше $2n-3$ хорд. База для $n = 3$ очевидна. Пусть утверждение верно для всех чисел, не превосходящих n, докажем, что оно верно для n.

Зафиксируем произвольную проведённую Юлием диагональ A (если Юлий не провёл ни одной диагонали, то хорд не больше n). Если она пересекается с какими-нибудь другими диагоналями, то последовательно применив операцию для A и всех пересекающихся с ней диагоналей, стирая при этом отличные от A диагонали, Алёша добьётся того, что A не будет пересекаться ни с одной хордой (так как при применении операции не появляется новых диагоналей, пересекающихся с A, а стороны с A не могут пересекаться). A разбивает многоугольник на два других многоугольника; пусть в одном k вершин, тогда в другом $n-k+2$ вершины. Заметим, что при применении операции к хордам из одного многоугольника новые хорды появятся только внутри него же, то есть последующие действия внутри многоугольников будут происходить независимо друг от друга. Таким образом, к каждому из полученных многоугольников можно применить предположение индукции. Тогда Алёша сможет оставить не более чем

$$2k - 3 + 2(n - k + 2) - 3 - 1 = 2n - 3$$

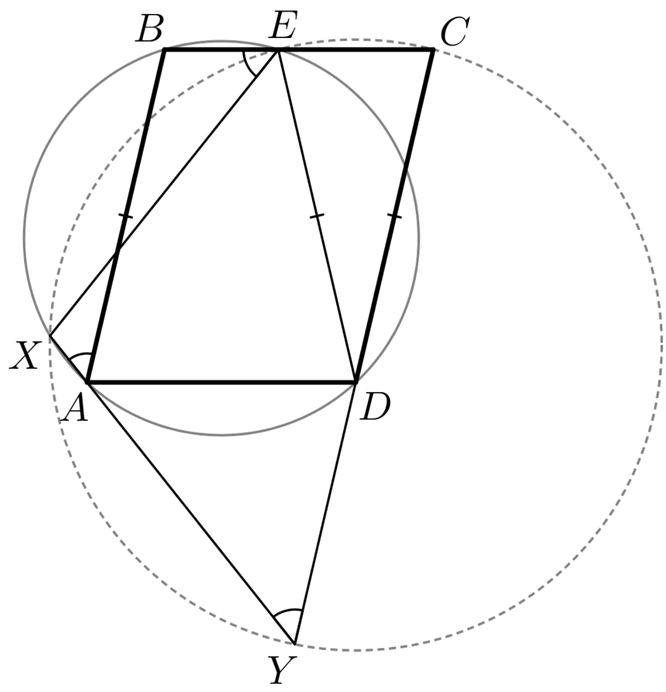
хорды («-1», поскольку хорду A мы посчитали в каждом из многоугольников). Переход доказан.

4. Дан параллелограмм $ABCD$ с острым углом A. На дуге AB описанной окружности треугольника ABD, не содержащей точку D, выбрана произвольная точка X. Лучи XA и CD пересекаются в точке Y. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CXY лежит на прямой, проходящей через D перпендикулярно AD.

Решение. Обозначим через E вторую точку пересечения описанной окружности треугольника ABD с прямой BC. Поскольку $ABED$ — вписанная трапеция, то она равнобокая, то есть $CD = AB = ED$. Заметим, что

$$\angle XYC = \angle XAB = \angle XEB = 180^\circ - \angle XEC,$$

то есть четырёхугольник $CEXY$ вписанный. Центр окружности, описанной около этого четырёхугольника, лежит на серединном перпендикуляре ℓ к его хорде CE. Поскольку CDE — равнобедренный треугольник, то ℓ проходит через точку D, а в силу параллельности AD и BC, $\ell \perp AD$. Таким образом, утверждение задачи доказано.



5. Назовём число *кринжовым*, если его можно представить в виде суммы

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_{100}},$$

где a_1, a_2, $\ldots$, a_{100} — целые неотрицательные числа (не обязательно различные). Найдите наименьшее натуральное n такое, что никакое кратное n число не является кринжовым.

Ответ. $2^{101} - 1$.

Решение. Докажем, что никакое число, меньшее $2^{101} - 1$, не подходит под условие. Пусть $n < 2^{101} - 1$. Тогда, рассмотрев представление n в двоичной системе счисления, получим, что n является суммой не более чем 100 различных степеней двойки:

$$n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \ldots + 2^{a_l}.$$

Рассмотрим число

$$2^{100} \cdot n = 2^{a_1+100} + 2^{a_2+100} + \ldots + 2^{a_l+100}.$$

Поскольку

$$2^{100} = 2^{99} + 2^{99} = 2^{99} + 2^{98} + 2^{98} = \ldots = 2^{99} + 2^{98} + \ldots + 2 + 2,$$

то 2^{a_l+100} можно представить в виде суммы $101-l$ слагаемых, то есть число $2^{100}\cdot n$ — кринжовое.

Докажем, что число $(2^{101}-1)k$ не является кринжовым ни при каком натуральном k. Предположим противное, пусть

$$(2^{101}-1)k = 2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{100}}.$$

Рассмотрим это равенство по модулю $2^{101}-1$. Несложно видеть, что остаток от деления 2^m на $2^{101}-1$ является степенью двойки, иначе говоря, для любого m найдётся такое $0\leqslant m'<101$, что $2^m\equiv 2^{m'}\pmod{2^{101}-1}$. Заменив каждое слагаемое его остатком по модулю $2^{101}-1$, получим

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots+2^{a_{100}}\equiv 2^{b_1}+2^{b_2}+\ldots+2^{b_{100}}\equiv 0\pmod{2^{101}-1}.$$

Далее будем делать следующие операции:

1. если какое-то слагаемое не меньше 2^{101}, то будем заменять его на остаток;
2. если среди b_i есть равные, то, воспользуемся равенством $2^x+2^x=2^{x+1}$ и уменьшим количество слагаемых на 1.

Понятно, что такие операции мы сможем проделать лишь конечное число раз (не более 99 раз вторую операцию и не более 99 раз первую операцию). После этого получится сравнение

$$2^{d_1}+2^{d_2}+\ldots+2^{d_s}\equiv 0\pmod{2^{101}-1},$$

где $s\leqslant 100$, а d_1, d_2, …, d_s — различные целые числа от 0 до 100. Но тогда

$$2^{d_1}+2^{d_2}+\ldots+2^{d_s}\leqslant 2^{100}+2^{99}+\ldots+2^2+2=2^{101}-2<2^{101}-1,$$

то есть сравнение не может выполняться. Полученное противоречие решает задачу.