Производная многочлена

Определение. Производной многочлена $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ назовём многочлен $P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1$.

Теорема 1. Если $P'(x) > 0$ на интервале (a, b), то $P(x)$ возрастает на интревале (a, b). Если $P'(x) < 0$ на интервале (a, b), то $P(x)$ убывает на интревале (a, b).

Теорема 2. Если x_0 — точка локального максимума или минимума многочлена $P(x)$, то $P'(x_0) = 0$.

1. Верно ли утверждение, обратное утверждению теоремы 2?

2. У многочлена степени n имеется n различных действительных корней. Докажите, что их среднее арифметическое равно среднему арифметическому действительных корней производной многочлена.

3. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные многочлены. Докажите, что

$$(P(x) \cdot Q(x))' = P'(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot Q'(x).$$

Напоминание. Говорят, что x_0 является корнем многочлена $P(x)$ *кратности* k, если $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен, причём $Q(x_0) \neq 0$.

4. Докажите, что многочлен $P(x)$ степени $n \geqslant 1$ имеет корень кратности $k > 1$ тогда и только тогда, когда $P(x)$ и $P'(x)$ имеют общий корень.

5. Дан многочлен $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$.

(a) Докажите, что $P(x)$ не имеет кратных корней.

(b) Докажите, что $P(x)$ имеет не более одного действительного корня.

6. Даны многочлены f и g степени n. Докажите, что функция

$$fg^{(n)} - f'g^{(n-1)} + \ldots (-1)^n f^{(n)} g$$

является константой. ($g^{(k)}$ — k-ая производная многочлена g.)

7. **(a)** Докажите, что у многочлена $P(x) = a_n x^{k_n} + a_{n-1} x^{k_{n-1}} + \ldots + a_1 x^{k_1} + a_0$ не более n положительных корней.

(b) Многочлен $P(x)$ степени n имеет n различных действительных корней. Какое наибольшее число его коэффициентов может равняться нулю?

8. Для некоторого многочлена $P(x)$ степени n и некоторых чисел $a < b$ выполнены неравенства

$$P(a) < 0, \quad -P'(a) \leqslant 0, \quad P''(a) \leqslant 0, \quad \ldots, \quad (-1)^n P^{(n)}(a) \leqslant 0;$$
$$P(b) > 0, \quad P'(b) \geqslant 0, \quad P''(b) \geqslant 0, \quad \ldots, \quad P^{(n)}(b) \geqslant 0.$$

Доказать, что все действительные корни многочлена $P(x)$ принадлежат интервалу (a, b).