

Режем блины

Наивное определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если при малых изменениях x мало изменяется значение функции.

Теорема о промежуточном значении. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

Пример. Дан выпуклый блин и прямая ℓ . Докажите, что существует прямолинейный разрез, параллельный ℓ , который делит блин на две части равной площади.

Во всех задачах можно считать, что блин — это многоугольник. В каждой задаче необходимо явно сформулировать, какая функция непрерывно меняется, и доказать это.

1. На плоскости дан выпуклый блин и точка A
(а) вне; (б) внутри него.
Докажите, что существует прямолинейный разрез, проходящий через точку A и делящий площадь блина пополам.
2. (а) Верно ли, что у любого блина существует хотя бы одна хорда, которая делит его на две части равной площади? (*Хорда — это отрезок, соединяющий две граничные точки блина.*)
(б) Дан произвольный блин. Докажите, что существует хорда, которая делит блин на части, площадь каждой из которых не меньше, чем $1/3$ площади блина.
3. (а) Докажите, что для любого выпуклого блина существует прямолинейный разрез, который делит пополам и его площадь, и его периметр.
(б) Верно ли, что любой многоугольный блин можно прямолинейным разрезом разделить на две меньших части с равными периметрами и равными наибольшими сторонами?
4. Дан выпуклый блин и точка A . Известно, что любой прямолинейный разрез, проходящий через A , делит блин на две части равной площади. Докажите, что блин центрально-симметричен.
5. На выпуклом плоском торте лежит выпуклая плоская выпуклая вишенка. Докажите, что существует хорда, касающаяся вишенки, причём середина хорды лежит на вишенке.
6. Есть плоский бутерброд с колбасой (хлеб и колбаса — выпуклые многоугольники). Докажите, что бутерброд можно разрезать на две части так, что в обеих частях будет одинаковое количество и хлеба, и колбасы.
7. Докажите, что любой выпуклый блин можно разрезать двумя взаимно перпендикулярными прямолинейными разрезами на четыре части равной площади.
8. Докажите, что выпуклый объёмный апельсин можно разрезать на две части так, чтобы и апельсин, и кожура разрезались пополам. Мякоть апельсина также является выпуклой фигурой.