Формула включений-исключений

1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества.
(a) Докажите **формулу включений-исключений**:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$

(b) Докажите, что если в формуле включений-исключений выражение в правой части оборвать перед знаком "+", то равенство заменится на неравенство "$\geqslant$", а если перед знаком "$-$" — то на неравенство "$\leqslant$".

2. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена синими точками на 2021 равных отрезков. Дима выбирает на каждой стороне по одной синей точке так, что у нового треугольника ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC. Сколькими способами он может это сделать? Точки A, B, C не синие.

3. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место?

4. Куб со стороной 20 разбит на 8000 единичных кубиков, и в каждом кубике записано число. Известно, что в каждом столбике из 20 кубиков, параллельном ребру куба, сумма чисел равна 1 (рассматриваются столбики всех трёх направлений). В некотором кубике записано число 10. Через этот кубик проходит три слоя $1 \times 20 \times 20$, параллельных граням куба. Найдите сумму всех чисел вне этих слоёв.

5. **(a)** Пусть $\varphi(n)$ — функция Эйлера. Докажите, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Напомним, что функция Эйлера $\varphi(n)$ принимает значение, равное количеству натуральных чисел, не превышающих n и взаимно простых с ним.

(b) Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что каждое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

6. В прямоугольнике площади 1 расположено 5 фигур площади 1/2 каждая.

(a) Докажите, что найдутся два фигуры, площадь общей части которых не меньше 3/20.

(b) Докажите, что найдутся две фигуры, площадь общей части которых не меньше 1/5.

(c) Докажите, что найдутся три фигуры, площадь общей части которых не меньше 1/20.