

Неравенство Йенсена

Определение. Функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется *выпуклой* на $[a, b]$, если для любых $x, y \in [a, b]$ и любых $\alpha, \beta \geq 0$ таких, что $\alpha + \beta = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Функция f называется *вогнутой* на $[a, b]$ если при тех же условиях выполняется аналогичное неравенство с противоположным знаком \geq . Геометрически, функция f выпукла (вогнута), если любая точка любой хорды кривой $y = f(x)$ лежит над (под) этой кривой или на ней.

Факт. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \geq 0$, то функция f выпукла на отрезке $[a, b]$. Если для всех $x \in (a, b)$ выполняется условие $f''(x) \leq 0$, то функция f вогнута на отрезке $[a, b]$.

1. **Неравенство Йенсена.** Функция f выпукла на $[a, b]$. Пусть числа x_1, \dots, x_n принадлежат отрезку $[a, b]$, а числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ неотрицательны и в сумме дают 1. Докажите, что

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

Для вогнутой функции выполнено аналогичное неравенство со знаком \geq .

2. Пусть $x_1, \dots, x_n \in [0, \pi]$. Докажите, что

$$\sin x_1 + \dots + \sin x_n \leq n \cdot \sin \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

3. Пусть $x_1, \dots, x_n \geq 0$, $\alpha > 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{x_1^\alpha + \dots + x_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

4. Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Докажите, что

$$(x_1 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

5. Числа x_1, \dots, x_n неотрицательны и в сумме дают 1. Докажите, что

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

6. Докажите, что для положительных x_i и y_i верно

$$\sqrt{(x_1 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + \dots + y_n)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}.$$

7. **Неравенство Гёльдера.** Пусть $p, q > 0$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Докажите, что для положительных a_i и b_i выполнено

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq (a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{1/p} (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{1/q}.$$