

Диаметр вписанной окружности

Во всех задачах используются следующие обозначения. Дан треугольник ABC ; в него вписана окружность ω с центром в точке I ; I_a — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC ; A_1, A_2 — точки касания вписанной и вневписанной окружности со стороной BC ; X — точка, диаметрально противоположная A_1 в ω ; A_0 — середина стороны BC ; N — точка Нагеля; M — точка пересечения медиан.

Факт. Точки A, X, A_2 лежат на одной прямой.

- (а) Докажите, что прямые A_0I и A_2M пересекаются в середине отрезка AA_1 .

(б) Докажите, что прямая A_0I отсекает на высоте AH отрезок, равный r .

(с) Докажите, что прямая A_2I делит высоту, опущенную из вершины A , пополам.

(д) Докажите, что I_aA_1 делит высоту, опущенную из вершины A , пополам.
- Пусть Y — отличная от X точка пересечения прямой AA_2 с ω . Докажите, что прямая A_0Y касается ω .
- (а) Докажите, что $AH = NA_2$.

(б) *Прямая Нагеля.* Докажите, что точки N, M, I лежат на одной прямой, причём $NM = 2MI$.
- Восстановите треугольник, если даны одна из его вершин, центр вписанной окружности и точка пересечения медиан.
- Про треугольник ABC известно, что $AB + AC = 3BC$. Докажите, что длина IM в 3 раза меньше радиуса ω .
- Точки H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC соответственно. Известно, что отрезки IO и BC параллельны. Докажите, что отрезки AO и HA_1 параллельны.
- Пусть P — вторая точка пересечения ω и AA_1 , Q — середина отрезка I_aA_0 . Докажите, что точки B, P, C, Q лежат на одной окружности.