

Функциональные уравнения. Добавка

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые при всех значениях переменных удовлетворяют неравенству

$$f(x + y) + f(y + z) + f(z + x) \geq 3f(x + 2y + 3z).$$

2. Для каких α существует функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)?$$

3. Найдите все такие функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$f(x + f(y + xy)) = (y + 1)f(x + 1) - 1,$$

где $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Найдите все такие функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что

$$f(x^2 - xy + y^2) = f^2(x) - f(x)f(y) + f^2(y).$$