

Функциональные уравнения

Почти во всех задачах нужно решить функциональное уравнение, т.е. найти все функции, удовлетворяющие условию.

1. Попробуйте что-нибудь подставить в функциональное уравнение.

(а) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy;$$

(б) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x + f(y)) = x + y;$$

(с) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y).$$

2. Попробуйте составить систему уравнений.

(а) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x;$$

(б) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$2f(1 - x) = 1 - xf(x);$$

(с) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1 - x}\right) = x.$$

3. Рассмотрим уравнение: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(а) Докажите, что для всех $\alpha \in \mathbb{N}$ выполнено $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

(б) Докажите, что для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$ выполнено $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

(с) Докажите, что если $f(x)$ ограничена на отрезке $[0, 1]$, то $f(x) = kx$ для некоторого $k \in \mathbb{R}$.

(д) Докажите, что либо f линейна, либо точки графика $f(x)$ расположены на плоскости всюду плотно (т.е. в любом круге на плоскости есть точки графика).

4. $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$, $f(x + y) = f(x) + f(y) - 2021$.

5. Непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что для всех x верно

$$f(x) \cdot f(f(x)) = 1.$$

Найдите $f(1000)$, если $f(2021) = 2020$.

6. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такова, что при всех x верно $f(f(x)) = x^3$. Чему равно $f(-1) + f(0) + f(1)$?