

## По мотивам ММО

1. Положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a - b = a/b$ . Что больше,  $a + b$  или  $ab$ ?
2. Барон Мюнхгаузен утверждает, что к любому трёхзначному числу можно справа приписать ещё три цифры так, чтобы получился полный квадрат. Прав ли барон?
3. Клетки бумажного квадрата  $8 \times 8$  раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата  $2 \times 2$ , не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются разными.)
4. В комнате находится несколько детей и куча из 2021 конфеты. Каждый из них по очереди подходит к куче, делит количество конфет в ней на количество детей в комнате (включая себя), округляет, забирает полученное число конфет и покидает комнату. При этом мальчики округляют вверх, а девочки — вниз. Докажите, что суммарное количество конфет у мальчиков, когда все выйдут из комнаты, не зависит от порядка детей в очереди.
5. В узлах сетки клетчатого прямоугольника  $4 \times 5$  расположены 30 точечных лампочек, изначально все они погашены. За ход разрешается провести любую прямую, не задевающую лампочек, такую, что с какой-то одной стороны от неё ни одна лампочка не горит, и зажечь все лампочки по эту сторону от прямой. Каждым ходом нужно зажигать хотя бы одну лампочку. Можно ли зажечь все лампочки ровно за четыре хода?
6. Точка  $M$  — середина стороны  $BC$  треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega$  проходит через точку  $A$ , касается прямой  $BC$  в точке  $M$  и пересекает сторону  $AB$  в точке  $D$ , а сторону  $AC$  — в точке  $E$ . Пусть  $X$  и  $Y$  — середины отрезков  $BE$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $MXY$ , касается  $\omega$ .
7. В каждом из 16 отделений коробки  $4 \times 4$  лежит по золотой монете. Коллекционер помнит, что какие-то две лежащие рядом монеты (соседние по стороне) весят по 9 грамм, а остальные по 10 грамм. Есть весы, на которые можно положить любое число монет и они покажут общий вес этих монет. Можно ли за три взвешивания определить эти две монеты?
8. В некоторой стране есть 100 городов, которые связаны такой сетью дорог, что из любого города в любой другой можно проехать только одним способом без разворотов. Схема сети дорог известна, развилки и перекрестки сети необязательно являются городами, всякая тупиковая ветвь сети обязательно заканчивается городом. Навигатор может измерить длину пути по этой сети между любыми двумя городами. Можно ли за 100 таких измерений гарантированно определить длину всей сети дорог?