От Архимеда до Фейербаха

Если вы не знаете задачу 0, то её надо сдавать, иначе — можно пользоваться.

0. *(Лемма Архимеда)* В окружности ω проведена хорда AB. Рассмотрим окружность, которая касается отрезка AB и одной из дуг AB. Докажите, что прямая, соединяющая точки касания, проходит через середину другой дуги.

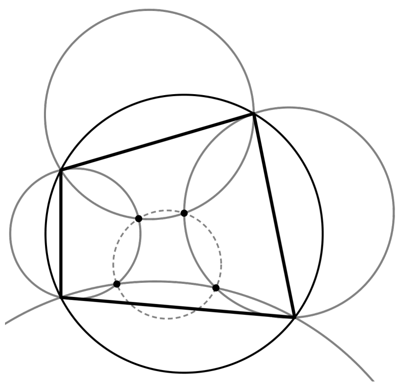
1. В окружности ω проведена хорда AB.
(a) Объясните, как построить окружность, касающуюся AB и ω, причем хорды — в заданной точке P.
(b) Пусть M — середина дуги AB, которой не касается построенная окружность. Докажите, что длина касательной, проведенной из точки M к этой окружности, равна MA.
(c) Докажите, что если в этот же сегмент вписать две окружности, пересекающиеся в точках C и D, то прямая CD содержит точку M.

Определение. Окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются, и касательные, проведённые в точке пересечения, перпендикулярны.

Упражнение. Докажите, что окружности перпендикулярны тогда и только тогда, когда радиусы этих окружностей, проведённые в точку пересечения, перпендикулярны.

2. Докажите, что геометрическое место центров окружностей, которые ортогональны двум данным пересекающимся окружностям — это часть их радикальной оси, лежащая вне окружностей.

3. *(Критерий Архимеда)* В окружности β проведена хорда MN, L — середина одной из дуг MN, γ — окружность с центром L и радиусом LM. Окружность α касается хорды MN в точке B и лежит с точкой L в разных полуплоскостях относительно MN. Докажите, что окружности α и β касаются тогда и только тогда, когда γ и α ортогональны.



4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник.
(a) Проведены еще четыре окружности, для которых стороны $ABCD$ являются хордами, A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки их попарного пересечения (см. рис.).

Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.
(b) A_1 — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на диагональ BD. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.

5. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. A_1 — центр окружности, вписанной в треугольник BCD. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник.

6. В треугольнике ABC: точки A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла B из вершин A и C соответственно; BB_1 — высота, D_1 — середина стороны AC. Докажите, что:
(a) точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности;
(b) центр этой окружности лежит на окружности девяти точек треугольника ABC.

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке X, а вневписанная окружность касается этой стороны в точке Y. A_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла B из вершин A и C соответственно. Докажите, что:
(a) точки A_1, Y, C_1 и X лежат на одной окружности;
(b) центром этой окружности является середина AC.

8. *(Теорема Фейербаха)*
(a) Пусть в треугольнике: α — вписанная окружность, β — окружность девяти точек. Докажите, что α и β касаются, используя еще две окружности: из задачи 6 и из задачи 7.
(b) Докажите, что окружность девяти точек касается любой вневписанной окружности.