Неравенство Мюрхеда

Определение. Пусть даны два упорядоченных по невозрастанию набора целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ с равными суммами. Говорят, что набор α *мажорирует* набор β (обозначение $\alpha \succ \beta$), если для любого k ($1 \leqslant k \leqslant n$)

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k} \beta_i.$$

Определение. Пусть дан набор целых неотрицательных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Тогда орбитой одночлена $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ называется однородный симметрический многочлен

$$T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum x_{\sigma_1}^{\alpha_1} \ldots x_{\sigma_n}^{\alpha_n}$$

(суммирование ведется по всевозможным перестановкам переменных).

Неравенство Мюрхеда. Пусть $\alpha \succ \beta$. Тогда для любых положительных чисел $x_1, \ldots, x_n$ выполнено неравенство

$$T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, \ldots, x_n).$$

В рамках этого листочка все переменные принимают только положительные значения.

1. **(a)** Пусть наборы $\alpha \succ \beta$ таковы, что $|\alpha_i - \beta_i| = |\alpha_j - \beta_j| = 1$ при некоторых $i \neq j$, и $\alpha_k = \beta_k$ при всех $k \notin \{i, j\}$. Докажите неравенство Мюрхеда для таких наборов.

(b) Докажите неравенство Мюрхеда в общем случае.

(c) При каких условиях неравенство Мюрхеда обращается в равенство?

2. Докажите двойное неравенство:

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \leqslant \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}.$$

3. Докажите неравенство о средних:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

4. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}.$$

5. Докажите неравенство

$$(x + y)(y + z)(z + x) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3).$$

6. Пусть $T = t_1 + \cdots + t_n$. Докажите неравенство

$$\frac{t_1}{T - t_1} + \cdots + \frac{t_n}{T - t_n} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

7. Известно, что $a + b + c = ab + bc + ca$. Докажите неравенство

$$a + b + c + 1 \geqslant 4abc.$$