

Теорема Хелли

1. На прямой расположено несколько отрезков, при этом у любых двух отрезков есть общая точка. Докажите, что у всех отрезков есть общая точка.
2. (а) На плоскости расположено несколько прямоугольников со сторонами, параллельным осям координат. У любых двух прямоугольников есть общая точка. Докажите, что тогда у всех прямоугольников есть общая точка.
(б) На плоскости расположено $\left\lceil \frac{4n}{3} \right\rceil$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n другими. Докажите, что есть прямоугольник, пересекающийся со всеми остальными прямоугольниками.

Определение: Множество называется **выпуклым**, если любой отрезок с концами в точках, принадлежащих множеству, полностью ему принадлежит.

3. (а) На плоскости расположены 4 выпуклых множества, у любых трёх из которых есть общая точка. Докажите, что у всех четырёх множеств есть общая точка.
(б) (*Теорема Хелли.*) На плоскости расположено конечно число выпуклых множеств, у любых трёх из которых есть общая точка. Докажите, что у всех множеств есть общая точка.
4. Про выпуклый многоугольник известно, что для любых трёх его сторон можно найти точку внутри многоугольника, основания перпендикуляров из которой попадают внутрь этих сторон. Докажите, что найдётся точка внутри многоугольника, основания перпендикуляров из которой лежат внутри всех сторон.
5. На плоскости расположено несколько прямых. Известно, что любые три из них можно пересечь единичным кругом. Докажите, что все прямые можно пересечь единичным кругом.
6. Несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость. Докажите, что из них можно выбрать три, которые покроют всю плоскость.
7. На плоскости даны несколько точек, расстояние между любыми двумя из которых не больше 1. Докажите, что все эти точки можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
8. На плоскости даны n точек общего положения. Докажите, что можно отметить на плоскости такую точку O что по любую сторону относительно любой прямой, проходящей через O будет лежать не менее $n/3$ точек. (*Если точка лежит на прямой, то считаем, что она находится сразу в обеих полуплоскостях.*)