

## Триангуляции

**Факт.** Многоугольник можно *триангулировать*, то есть разбить на треугольники диагоналями, не имеющими общих точек, кроме вершин. Количество треугольников на 2 меньше количества вершин многоугольника.

**Определение.** *Ухом* будем называть треугольник триангуляции, две стороны которого совпадают со сторонами исходного многоугольника.

1. Докажите, что в триангуляции  $n$ -угольника ( $n \geq 4$ ) хотя бы два уха.
2. На доске нарисовали выпуклый многоугольник. В нём провели несколько диагоналей, не пересекающихся внутри него, так что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, примыкающих к этой вершине, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стёртые диагонали?
3. Докажите, что в триангуляции правильного 2021-угольника хотя бы один треугольник остроугольный.
4. Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.
5. Сколько существует триангуляций выпуклого  $n$ -угольника, в которых никакой треугольник не имеет в качестве всех трёх своих сторон три диагонали исходного  $n$ -угольника?
6. На доске нарисован выпуклый  $n$ -угольник ( $n \geq 4$ ). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если  $n$ -угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.
7. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.
8. Вписанный многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников не зависит от способа разрезания.
9. Дан выпуклый многоугольник, никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Назовём окружность *граничной*, если она проходит через три подряд идущие вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Назовём окружность *внутренней*, если она проходит через три попарно несоседние вершины многоугольника и содержит многоугольник внутри. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.