

## Разнобой по геометрии

1. Из вершины  $B$  остроугольного треугольника  $ABC$  проведены перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $BC$  до пересечения с прямой  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников  $ABC$  и  $PBQ$  касаются.
2. В треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — центр описанной окружности. Через точки  $A$  и  $C$  проведена окружность, касающаяся прямых  $AO$  и  $CO$ . Докажите, что вторые точки пересечения прямых  $BA$  и  $BC$  с этой окружностью являются концами её диаметра.
3. Пусть  $P$  — произвольная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = AP$ ,  $CN = CP$ . Перпендикуляры, проведённые в точках  $M$  и  $N$  к сторонам  $AB$  и  $BC$  соответственно, пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle QIB = 90^\circ$ , где  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .
4. Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Пусть  $A_0$  и  $C_0$  — соответственно середины её дуг  $BC$  и  $AB$ , не содержащих вершин  $A$  и  $C$ . Оказалось, что отрезок  $A_0C_0$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите угол  $B$ .
5. Пусть  $B_0$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . Проведём из середины отрезка  $AB_0$  перпендикуляр к стороне  $BC$ , а из середины отрезка  $B_0C$  перпендикуляр к стороне  $AB$ . Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через  $B'$ . Аналогично построим точки  $C'$  и  $A'$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  подобны.
6. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагональ  $AC$  делит диагональ  $BD$  пополам. Для какой точки внутри четырёхугольника произведение расстояний до сторон будет наибольшим?
7. Дана трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Окружность  $\omega_1$  касается основания  $BC$  в точке  $M$  и продолжений сторон  $AB$  и  $CD$  за точки  $B$  и  $C$ . Окружность  $\omega_2$  касается основания  $AD$  в точке  $N$  и продолжений сторон  $AB$  и  $CD$  за точки  $A$  и  $D$ . Докажите, что отрезок  $MN$  проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
8. Дан треугольник  $ABC$ . Через точку  $X$ , лежащую внутри него, проводятся отрезок  $c_x$ , параллельный  $AB$ , с концами на сторонах  $AC$  и  $BC$ , и отрезок  $b_x$ , параллельный  $AC$ , с концами на сторонах  $AB$  и  $BC$ . Докажите, что все точки  $X$ , для которых длины отрезков  $b_x$  и  $c_x$  равны, лежат на одной прямой.