

Разнобой по теории чисел

1. Натуральные числа a и b имеют ровно по 99 натуральных делителей (считая 1 и само число). Может ли число ab иметь ровно 1000 натуральных делителей?
2. Найдутся ли какие-нибудь 4 натуральных числа, такие что их попарные наибольшие общие делители (в каком-то порядке) — это 6 последовательных чисел?
3. Существуют ли такие натуральные числа x , y и z , где x — нечетное число, что выполняется равенство $x^{10} + y^{10} = z^{11}$?
4. Решите в целых числах уравнение $19x^3 - 17y^3 = 50$.
5. Пусть каждое из натуральных чисел n , $n + 1$, $n + 2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.
6. Для числа n^2 его размером назовем наибольшее количество частей (часть — несколько подряд идущих цифр), на которые может быть разбита его десятичная запись так, что каждая из частей — квадрат натурального числа (возможно, начинающийся с нескольких нулей). Существует ли квадрат размера больше 2021?
7. Найдите все натуральные числа, единственным образом представимые в виде $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$ где x , y — натуральные числа.
8. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие 1 000 000, и такие что $(a + b)^3$ делится на ab . Докажите, что $|a - b| > 10\,000$.