Разнобой по многочленам

1. Докажите, что при любом целом a число $a^{2008}+a^2+1$ делится на a^2+a+1.

2. Какое наибольшее количество точек пересечения может быть у графиков трёх функций $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$ и $y = cx^2 + ax + b$, где a, b и c — попарно различные целые числа?

3. Существуют ли такие два многочлена ненулевых степеней $P(x)$ и $Q(x)$, что
$$P(Q(x)) + Q(P(x)) = P(x) \cdot Q(x)?$$

4. Известно, что $f(x)$ — приведённый квадратный трёхчлен, имеющий ровно 2 различных корня. Может ли так оказаться, что у многочлена $f(f(x))$ — ровно 3 различных корня, а у многочлена $f(f(f(x)))$ — ровно 7 различных корней?

5. $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Уравнения $P(x) = 1$, $P(x) = 2$, $P(x) = 3$ имеют целые корни. Докажите, что уравнение $P(x) = 5$ не может иметь два или более целых корня.

6. Даны действительные числа $a_1 \le a_2 \le a_3$ и $b_1 \le b_2 \le b_3$ такие, что
$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$
$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_1b_3.$$
Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

7. a_0, a_1, a_2, …, a_{97} — действительные числа. Какое наибольшее количество различных действительных корней может иметь многочлен $x^{100} + a_{97}x^{97} + a_{96}x^{96} + \ldots + a_1x + a_0$?

8. Верно ли, что любой многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде суммы кубов трёх многочленов с действительными коэффициентами?