Таблички

1. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

2. Дана таблица $n \times n$, в каждой её клетке записано число, причём все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа.

3. В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n+1$.

4. Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64 так, что соседние номера стоят в соседних (по стороне) клетках. Какова наименьшая возможная сумма номеров на диагонали?

5. В клетках таблицы $n \times n$ стоят плюсы и минусы. За один ход разрешается в произвольной строке или в произвольном столбце поменять все знаки на противоположные. Известно, что из начальной расстановки можно получить такую, при которой во всех ячейках стоят плюсы. Докажите, что этого можно добиться не более чем за n ходов.

Табличка — это граф!

6. В белом клетчатом квадрате 100×100 в чёрный цвет покрасили k клеток. Если в какой-то момент три из четырёх клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата, окрашены в чёрный цвет, то через минуту и четвёртая клетка тоже перекрашивается в чёрный. При каком наименьшем k может оказаться так, что через некоторое время весь квадрат станет чёрным?

7. На клетчатой доске 9×9 отмечено 18 клеток так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток назовём *эквивалентными*, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, из одного расположения можно получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.