

## Разнойбой

1. Из Сочи в Москву поочерёдно выходят путники, на каждом из которых сидит своя муха. Все путники идут с постоянными различными скоростями; для любой пары путников известно, что более медленный из них вышел из Сочи раньше, но пришёл в Москву позже. Когда два путника встречаются, мухи на них меняются местами (никакие три путника не встречаются вместе одновременно). Докажите, что какая-то муха побывает на всех путниках.
2. Докажите, что из бесконечной арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d \neq 0$  можно выбрать подпоследовательность, являющуюся бесконечной геометрической прогрессией, тогда и только тогда, когда отношение  $\frac{a}{d}$  рационально.
3. Пусть  $n > 1$  и  $p$  — нечётные натуральное и простое числа соответственно. Докажите, что если сумма  $n$ -ых степеней двух натуральных чисел равна степени  $p$ , то  $n$  является степенью числа  $p$ .
4. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на  $a$  метров у себя и на  $b$  метров у соперника», где  $a, b$  — действительные числа,  $0 < a < b$ . Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе  
(а) конечно; (б) бесконечно?
5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что придумал такую комбинацию вращений кубика Рубика, что из любого состояния кубика можно перейти в собранное, повторив эту комбинацию достаточное число раз. Не привирает ли барон?
6. Даны  $n$  действительных чисел. Разность между их произведением и каждым из этих чисел — нечётное число. Докажите, что все данные  $n$  чисел иррациональны.