Перестановки

Определение. Пусть дано конечное множество M. (Часто $M = \{1, 2, \ldots, n\}$). *Перестановка* — биективное отображение $\sigma\colon M \to M$.

Пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 5 & 8 & 4 & 10 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

Здесь, например, $\sigma(3) = 2$, а $\sigma(8) = 8$.

Определение. *Инверсией* перестановки σ называется пара чисел i, j такая, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$. Так, в примере пара $(2, 4)$ образует инверсию, так как $2 < 4$, но $7 > 6$.

Определение. *Четность* перестановки — это четность числа ее инверсий.

Определение. *Цикл* $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — такая перестановка, что $\sigma(i_j) = i_{j+1}$; $\sigma(i_k) = i_1$; $\sigma(l) = l$ при $l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Определение. *Транспозиция* — цикл длины два.

Произвольную перестановку бывает удобно представить в виде композиции непересекающихся циклов. Так, перестановка из примера — композиция циклов $(1, 3, 2, 7, 5)$, $(4, 6, 9)$, $(11, 12)$, (8), (10). *(В таком разложении принято выделять неподвижные элементы как циклы длины* 1*).*

Определение. *Тип* перестановки — набор длин циклов в ее разложении. Так, перестановка из примера имеет тип $(5, 3, 2, 1, 1)$.

1. **(a)** Известны четности перестановок σ и τ. Что можно сказать о четности композиции $\sigma \circ \tau$?

(b) Найдите четность перестановки типа $(d_1, d_2, \ldots, d_k)$.

2. **(a)** Докажите, что любую перестановку можно представить в виде композиции нескольких транспозиций.

(b) Опишите все перестановки, которые можно представить в виде композиции циклов длины 3.

3. **(a)** Сколько существует перестановок на 10-элементном множестве?

(b) Каких перестановок среди них больше: четных или нечетных?

(c) Сколько существует перестановок типа $(1, 2, 3, 4)$?

4. На полке в перепутанном порядке стоят n пронумерованных томов собрания сочинений Владимира Ленина. Каждую минуту библиотекарь меняет местами

(a) некоторые две соседние книги; **(b)** две произвольные книги.

За какое наименьшее время библиотекарь может гарантированно расставить книги в порядке возрастания?

5. Нескольким детям дали по карандашу одного из трех цветов. Дети как-то поменялись карандашами, после чего у каждого оказался не тот карандаш, который был у него вначале. Докажите, что цвета карандашей могли быть такими, что у каждого вначале и в конце карандаши были разных цветов.

6. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.

7. Придумайте две перестановки, такие, что их композициями можно получить любую перестановку.

8. **Игра «пятнашки».** В квадрате 4×4 расположены 15 фишек размера 1×1, пронумерованных числами от 1 до 15. За один ход можно передвигать на пустую клетку соседнюю с ней по стороне фишку.

(a) Можно ли получить из левой конфигурации правую?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(b) Докажите, что из любой начальной конфигурации можно получить одну из двух вышеприведенных конфигураций.