Рациональное и не очень

Определение. Действительное число α называется *рациональным*, если оно представимо в виде $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и *иррациональным* в противном случае.

1. Докажите, что следующие числа иррациональны:
(a) $\sqrt{2}$; **(b)** $1+\sqrt[3]{2+\sqrt{7+4\sqrt{2020}}}$; **(c)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;
(d*) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}+\sqrt{13}$.

2. **(a)** Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби (возможно, с предпериодом).
(b) Докажите, что полученная десятичная дробь конечна тогда и только тогда, когда $q = 2^m 5^n$.
(c) Докажите, что если $(q, 10) = 1$, то предпериода нет.

3. Докажите, что если число $a + b\sqrt{2}$, где a и b рациональны, является корнем многочленом с целыми коэффициентами, то и число $a - b\sqrt{2}$ является корнем этого многочлена.

4. Существуют ли иррациональные числа a и b такие, что число a^b рациональное?

5. В числе $\alpha = 0{,}12457\ldots$ n-я цифра после запятой равна цифре слева от запятой в числе $n\sqrt{2}$. Докажите, что α — иррациональное число.

6. **(a)** Докажите, что $\cos n\varphi$ $(n \in \mathbb{N})$ представляется как многочлен от $\cos\varphi$, причем если $T_n(x)$ — тот самый многочлен, где $x = \cos\varphi$, то

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

(b) Докажите, что $\cos 20^\circ$ — иррациональное число.
(c) Докажите, что если $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ = \frac{m}{n}$, где p, q, m, $n \in \mathbb{Z}$, то n является степенью двойки (возможно, нулевой).
(d) Докажите, что на самом деле $\frac{m}{n}$ может равняться только одному из чисел 0, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$.
(e) Выведите отсюда, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.