# Разнобой по геометрии

**1.** Точка $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$. На сторонах $AB$ и $BC$ отмечены точки $C_1$ и $A_1$ соответственно так, что

$$AI^2 = AC_1 \cdot AC, \quad CI^2 = CA_1 \cdot CA.$$

Докажите, что точка $I$ лежит на прямой $A_1C_1$.

**2.** В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $BB_1$ и $CC_1$. На высоте $BB_1$ выбрана точка $D$ такая, что $B_1D = C_1D$. Точка $M$ — середина $BC$. Докажите, что точки $B$, $C_1$, $D$, $M$ лежат на одной окружности.

**3.** Центр вписанной окружности треугольника $ABC$ лежит на его прямой Эйлера. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**4.** **(a)** *Окружность Конвея.* Дан треугольник $ABC$. Точки $A_1$ и $A_2$ лежат на лучах $BA$ и $CA$ за точкой $A$ так, что $AA_1 = AA_2 = BC$. Аналогично определяются точки $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$. Докажите, что точки $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ лежат на одной окружности.
**(b)** *Окружность Тэйлора.* Из оснований высот треугольника $ABC$ опущены перпендикуляры на прямые, содержащие две другие стороны. Докажите, что 6 полученных точек лежат на одной окружности.
*Второй пункт можно решать по-разному, можно, например, свести к первому пункту.*

**5.** Внутри выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ нашлась такая точка $O$, что треугольники $ABO$, $CDO$, $EFO$ равносторонние. Докажите, что

$$3(BC + DE + FA) > 2(AB + CD + EF).$$

**6.** Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка $X$, что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.

**7.** Точка $I$ — центр вписанной в треугольник $ABC$ окружности. Внутри треугольника $ABC$ расположена окружность $\omega$, которая касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $X$ и $Y$. Пусть $Z$ — одна из двух точек пересечения $\omega$ с описанной окружностью треугольника $AIC$. Докажите, что описанные окружности треугольников $BXZ$ и $CYZ$ касаются.