Лемма об уточнении показателя

Для простого p и целого n через $ord_p(n)$ будем обозначать степень вхождения простого числа p в n, то есть максимальную степень числа p, на которую делится n.

Лемма об уточнении показателя (LTE-лемма). *Пусть a и b — различные целые числа, k — натуральное, p — простое, не являющееся делителем a, и пусть выполнено одно из условий 1 или 2. Тогда*

$$ord_p(a^k - b^k) = ord_p(a - b) + ord_p(k).$$

Условие 1: $p \neq 2$ и $a - b$ делится на p.
Условие 2: $p = 2$ и $a - b$ делится на 4.

1. Даны простое число p, натуральные k и s, различные целые a и b такие, что $a - b$ делится на p, причём a и b не делятся на p.
(a) Докажите, что $ord_p(a^p - b^p) > ord_p(a - b)$.
(b) Докажите, что $ord_p(a^s - b^s) = ord_p(a - b)$, если s не кратно p.
(c) Докажите, что $ord_p(a^k - b^k) \geqslant ord_p(a - b) + ord_p(k)$.
(d) Докажите, что если $p > 2$, то $ord_p(a^p - b^p) = ord_p(a - b) + 1$.
(e) Докажите лемму об уточнении показателя.

2. На какую наибольшую степень пятёрки делится число $3^{1000} - 2^{1000}$?

3. Найдите наименьшее простое p такое, что $2^{120!} - 1$ делится на p, но не делится на p^2.

4. Найдите показатель числа 1001 по модулю 2^{1001} (то есть наименьшее число d такое, что $1001^d \equiv 1 \pmod{2^{1001}}$).

5. На сколько нулей оканчивается число $4^{5^6} + 6^{5^4}$?

6. При каких натуральных n число $2020^n - 1$ делится на $1000^n - 1$?

7. Решите в натуральных числах уравнение $3^x = 2^x \cdot y + 1$.

8. **(a)** Докажите, что для любого натурального $a > 2$ найдётся такое натуральное $n > 1$, что $a^n - 1$ делится на n^2.
(b) Верно ли это утверждение для $a = 2$?

9. Решите в натуральных числах уравнение $a^b + 1 = (a + 1)^c$.