Бесконечность

1. Докажите, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много подряд идущих составных чисел. Правда ли, что найдётся бесконечно много составных подряд идущих чисел?

2. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?

3. Витя и Лёша по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Витя своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, а Лёша — одну. Если в итоге получится чисто периодическая дробь (без предпериода), выигрывает Витя, иначе — Лёша. Кто имеет выигрышную стратегию? *(Но перед тем, как рашеть задачу, осознайте, что значит «в итоге», и почему так вообще корректно говорить.)*

4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста.
(a) Пусть рост каждого богатыря составляет целое число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.
(b) Пусть рост каждого богатыря не обязательно является целым. Докажите, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.

5. *Лемма Кёнига.* Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины которого конечна, найдётся бесконечный путь.

6. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета (то есть так, чтобы любые две страны, имеющие общий кусок границы ненулевой длины, были покрашены в разные цвета). Докажите, что тогда и бесконечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета.

7. Натуральные числа разбили на несколько бесконечных арифметических прогрессий, разности которых равны d_1, d_2, ...
(a) Пусть прогрессий конечное число. Докажите, что $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots=1$.
(b) Верно ли утверждение предыдущего пункта, если прогрессий бесконечное число?

8. Мудрецы выстроены в бесконечный ряд. На каждом — колпак одного из двух цветов. Каждый мудрец знает свой номер в ряду и видит всех мудрецов с большими номерами. Мудрецы по команде должны одновременно назвать предполагаемый цвет своего колпака. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о стратегии так, чтобы при любой расстановке колпаков не угадало цвет своего колпака лишь конечное число мудрецов.