Асимптотика

Основная идея листика — смотреть на большие значения параметра в задаче. Иногда полезно взять какой-то достаточно большой промежуток и оценить на нём число каких-то объектов из задачи. А потом понять, что оно растёт слишком быстро или наоборот медленно. Как правило, в задачах всё в итоге сведётся к сравнению двух функций $f(n)$ и $g(n)$ при больших значениях n. Здесь полезно понимать следующее.

- Если f и g — многочлены с положительным старшим коэффициентом, причём степень f больше степени g, то начиная с некоторого момента будет выполнено неравенство $f > g$. Более того, отношение f/g может быть сколь угодно большим. Например, квадратичная функция растёт быстрее линейной.

- Если f и g — многочлены с положительным старшим коэффициентом одинаковой степени, то с некоторого момента больше будет тот, чей старший коэффициент больше.

- Показательная функция a^n для $a > 1$ с некоторого момента будет больше значения любого фиксированного многочлена $f(n)$.

Пример. Плоскость разбита на равные многоугольники, внутри каждого из которых одна целая точка, а на границе точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна 1.

Решение. Обозначим площадь каждого многоугольника за S, а их диаметр (т.е. расстояние между наиболее удалёнными точками) за d. Рассмотрим квадрат $[0, N]\times[0, N]$. Оценим количество многоугольников, целиком содержащихся внутри этого квадрата. Так как их диаметр равен d, то любой многоугольник, содержащий целую точку из квадрата $[d+1, N-d-1]\times[d+1, N-d-1]$, должен лежать целиком внутри квадрата $[0, N]\times[0, N]$. Таким образом, этих многоугольников хотя бы столько же, сколько целых точек в этом малом квадрате, т.е. $(N-2d-1)^2$ (т.к. каждый многоугольник содержит ровно одну целую точку).

Аналогично можно сказать, что все многоугольники, хоть как-то пересекающие квадрат $[0, N]\times[0, N]$ должны лежать целиком внутри большого квадрата

$$[-d-1, N+d+1]\times[-d-1, N+d+1]$$

и их количество не больше $(N+2d+3)^2$, так как каждый из них содержит какую-то целую точку.

Тогда площадь среднего квадрата $[0, N] \times [0, N]$ должна находиться между $S \cdot (N - 2d - 1)^2$ и $S \cdot (N + 2d + 3)^2$ при любом N, т.е. должны выполняться неравенства

$$S \cdot (N - 2d - 1)^2 \leqslant N^2 \leqslant S \cdot (N + 2d + 3)^2,$$

откуда

$$\frac{N^2}{(N + 2d + 3)^2} \leqslant S \leqslant \frac{N^2}{(N - 2d - 1)^2}.$$

Но отсюда следует, что $S = 1$, потому что как левую, так и правую часть можно сделать сколь угодно близкими к единице при достаточно большом N.

1. **(a)** Докажите, что существует число, большее 10^{2020}, которые нельзя представить в виде суммы куба и квадрата.
(b) Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

2. Двое игроков играют в игру, первый каждым своим ходом отмечает одну красную точку, а второй — 100 синих точек. Докажите, что первый за несколько ходов сможет построить правильный треугольник с вершинами в красных точках.

3. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася — 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10×10. Сможет ли Вася ему помешать?

4. Мордор каждый год присоедниияет к себе по одному городу (изначально в Мордоре один город) и проводит дороги из всех старых городов в новый. За год партизан Арагорн может разрушить не более 100 дорог. Докажите, что как бы он ни старался, в Мордоре когда-нибудь найдутся 1000 городов, попарно соединённых дорогами.

5. Существует ли квадратный трехчлен, все значения которого в натуральных точках — кубы натуральных чисел?

6. Из бесконечной клетчатой доски вырезали клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся клетки обойти ходом коня, побывав на каждой клетке ровно по одному разу?

7. Докажите, что плоскость нельзя разбить на равные выпуклые семиугольники.