

Неоднородность

Пример. Существуют ли 2020 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится суммой всех чисел?

Решение. Возьмём произвольные натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2020}$. Если условие выполнилось, то отлично, в противном случае нам нужно как-то поправить наши числа. Давайте домножим все числа на некоторое k . Тогда необходимо, чтобы $k^2 a_i a_j$ делилось бы на

$$ka_1 + ka_2 + \dots + ka_{2020} = k(a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}).$$

Видно, что если в качестве k взять $a_1 + a_2 + \dots + a_{2020}$, то это действительно будет верно.

Если можно было бы добиться каких-нибудь других неоднородных условий. Например, того, чтобы квадрат произведения любых двух чисел делился бы на куб суммы всех чисел. Для этого достаточно было бы в качестве k взять куб суммы всех чисел.

1. Существует ли арифметическая прогрессия из 2020 членов с ненулевой разностью такая, что каждый её член имеет вид $\frac{1}{n}$ для некоторого натурального n ?
2. Существуют ли 2020 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на их сумму?
3. Существуют ли различные натуральные числа a, b, c , большие миллиарда, такие, что их произведение делится на любое из них, увеличенное на 2020?
4. (а) Существуют ли натуральные a, b, c такие, что

$$a^{2018} + b^{2019} = c^{2020} ?$$

(б) Существуют ли натуральные a, b, c (причём a — нечётное) такие, что $a^{2019} + b^{2019} = c^{2020}$?

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 2020$. Обязательно ли число abc является
 - (а) точным квадратом;
 - (б) точным кубом?
6. Существуют ли натуральные числа $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2020}$ такие, что

$$\text{НОК}(a_1, a_2) > \text{НОК}(a_2, a_3) > \dots > \text{НОК}(a_{2019}, a_{2020})?$$

7. Дано натуральное число n . Существуют ли n различных натуральных чисел таких, что их сумма является точной 2020-й степенью, а их произведение — точной 2021-й степенью?