

## Разнобой по графам

1. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?
2. В своре из  $2m + 1$  собак для любых  $m$  собак найдётся отличная от них собака, подравшаяся с каждой из них. Докажите, что в этой своре есть собака, подравшаяся со всеми остальными.
3. В стране 100 городов и не менее 1000 дорог между городами. Докажите, что туристическая компания может организовать не менее 10 ‘золотых колец’, то есть, не менее 10 непересекающихся по дорогам циклических маршрутов.
4. На свободные поля доски  $9 \times 10$  по одному выставляются короли. Выставляемый король должен побить чётное число пустых полей (в частности, ни одного). Какое наибольшее число королей можно выставить?
5. Каким наименьшим количеством полных графов из  $n$  вершин ( $n > 2$ ) можно покрыть все рёбра полного графа из  $2n$  вершин?
6. В графе 100 вершин и 2020 рёбер (петель и кратных ребёр нет). Докажите, что точно найдётся вершина степени больше 20, но меньше 70.
7. Для каких натуральных  $N$ , больших 50, можно так познакомить между собой  $N$  человек, чтобы у каждого 50 из них был ровно один общий знакомый?