Двойные отношения

Определение. *Двойным отношением точек* A, B, C, D, лежащих на одной прямой, называется число
$$(A, B; C, D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$
А именно, это отношение отношений, в которых точки C и D делят отрезок AB.

(Отношение коллинеарных верткоров $\overrightarrow{u}/\overrightarrow{v}$ равно отношению длин векторов, взятому со знаком плюс, если вектора сонаправлены, и со знаком минус в противном случае.)

Определение. *Двойным отношением прямых* PA, PB, PC, PD, пересекающихся в одной точке, называется число
$$(PA, PB; PC, PD) = \frac{\sin\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC})}{\sin\angle(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})} : \frac{\sin\angle(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PD})}{\sin\angle(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PD})},$$
где $\angle(\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY})$ — это угол, на который надо повернуть вектор $\overrightarrow{PX}$ против часовой стрелки, чтобы он стал сонаправлен вектору $\overrightarrow{PY}$.

Несложно проверить, что определение корректно, то есть не зависит от того, какая именно точка A выбрана на прямой PA.

1. Докажите, что для точек A, B, C, D, лежащих на одной прямой, и точки P вне этой прямой выполнено равенство
$$(A, B; C, D) = (PA, PB; PC, PD).$$

Из первой задачи сразу вытекает важное свойство двойных отношений: двойное отношение сохраняется при центральной проекции. А именно, пусть прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке, прямая ℓ пересекает их в точках A, B, C, D соответственно, а прямая m — в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Тогда $(A, B; C, D) = (A_1, B_1; C_1, D_1)$. В следующих задачах этим утверждением можно пользоваться, не доказав задачу 1.

Определение. Четверка точек A, B, C, D называется *гармонической*, если точки C и D делят отрезок AB в одном и том же отношении, то есть $(A, B; C, D) = -1$.

2. **(a)** Чевианы AX, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в одной точке. Прямые B_1C_1 и BC пересекаются в точке Y. Докажите, что
$$(B, C; X, Y) = (B, C; Y; X) = (C, B; X, Y) = (C, B; Y, X) = -1.$$

(b) Точки K и L — основания внутренней и внешней биссектрис угла A треугольника ABC соответственно. Докажите, что четвёрка B, C, K, L гармоническая.

(c) Точки P и Q инверсны относительно окружности ω. Прямая PQ пересекает ω в точках A и B. Докажите, что четвёрка точек A, B, P, Q гармоническая.
(d) Четвёрка прямых a, b, c, d гармоническая: $(a, b; c, d) = -1$. Пусть прямая ℓ, параллельная d, пересекает прямые a, b, c в точках A, B, C. Докажите, что $AC = BC$.

Последний пункт можно интерпретировать так. Пусть прямые ℓ и d пересекаются в бесконечно удалённой точке ∞. Тогда

$$(a, b; c, d) = (A, B; C, \infty) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{A\infty}}{\overrightarrow{B\infty}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : 1 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}.$$

3. Продолжения несмежных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q, а диагонали пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную PQ. Докажите, что отрезок этой прямой, заключённый внутри четырёхугольника, делится точкой O пополам.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL и биссектриса внешнего угла AN. Точка M — середина стороны AC, P — точка пересечения прямых AB и ML. Докажите, что $PA = PN$.

5. Пусть AH_a и AL_a — основание высоты и биссектрисы треугольника ABC, проведённых из вершины A. Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках K_a и T_a соответственно.
(a) Докажите, что $(H_a, L_a; K_a, T_a) = -1$;
(b) Пусть I и I_a — центр вписанной и вневписаной окружностей треугольника ABC. Докажите, что прямые H_aI и H_aI_a симметричны относительно прямой BC.
(c) Определим аналогично точки H_b, L_b, K_b, T_b. Докажите, что

$$(C, H_a; T_a, K_a) = (C, H_b; T_b, K_b).$$

(d) Докажите, что прямые H_aH_b, L_aL_b, T_aT_b, K_aK_b пересекаются в одной точке.

Определение. *Двойным отношением* $(A, B; C, D)$ *точек A, B, C, D, лежащих на одной окружности*, назовём двойное отношение четвёрки прямых $(PA, PB; PC, PD)$ для произвольной точки P на окружности (отличной от A, B, C, D).

6. Докажите корректность определения.

7. *Теорема о бабочке.* Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AD и BC с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.