

pqr -добавка

1. Какие условия на числа p, q, r равносильны тому, что
(а) все числа a, b, c не меньше 1;
(б) a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника (возможно, вырожденного)?
2. Известно, что a, b, c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 6 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \right).$$

3. Для неотрицательных a, b, c выполнено равенство $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Докажите, что

$$ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

4. Известно, что $a, b, c \geq 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$