

## Разнойбой по ТЧ

1. По кругу выписали 3000 цифр. Известно, что если читать эти цифры по часовой стрелке, начиная с некоторого определённого места, то полученное 3000-значное число делится на 27. Докажите, что если начать читать по часовой стрелке с любого другого места, то полученное число также будет делиться на 27.
2. Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  удовлетворяют равенству  $ab = cd$ . Докажите, что число  $a^{2020} + b^{2020} + c^{2020} + d^{2020}$  составное.
3. Докажите, что  $1^{1001} + 2^{1001} + \dots + 1001^{1001}$  делится на  $1 + \dots + 1001$ .
4. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами? Иными словами, имеет ли решение в целых числах неравенство:  $n^2 < a^3 < b^3 < (n + 1)^2$ ?
5. Докажите, что для любого простого числа  $p$  существует бесконечно много чисел вида  $2^n - n$  (где  $n \in \mathbb{N}$ ), делящихся на  $p$ .
6. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 - 2x - 2y - 1 = 2009^{2009} ?$$

7. Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде  $\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — натуральные числа.
8. Доказать, что если число  $1 + 2^n + 4^n$  при некотором натуральном  $n$  является простым, то  $n = 3^k$ , где  $k \in \mathbb{Z}_+$ .