pqr-метод (он же uvw-метод)

По тройке действительных чисел a, b, c можно однозначно определить тройку чисел

$$p = a + b + c, \quad q = ab + bc + ca, \quad r = abc.$$

Чтобы восстановить по тройке p, q, r числа a, b, c, необходимо решить уравнение $x^3 - px^2 + qx - r = 0$. Однако у этого уравнения не всегда все корни действительные. В листике про симметрические многочлены мы доказывали, что оно имеет три действительных корня тогда и только тогда, когда $(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 \geqslant 0$. Это неравенство нам будет удобнее переписать в терминах p, q и r:

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = -4p^3r + p^2q^2 + 18pqr - 4q^3 - 27r^2 = T(p,q,r) \geqslant 0.$$

1. Действительные числа a, b, c таковы, что $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $a^3 + b^3 + c^3$.

В этом листике мы будем решать неравенства, в которых обычно переменные неотрицательные. Назовём тройку (p, q, r) *допустимой*, если ей соответствует тройка действительных неотрицательных чисел a, b, c.

2. Докажите, что тройка (p, q, r) допустима тогда и только тогда, когда

$$p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ T(p,q,r) \geqslant 0.$$

3. **a) Лемма об r.** Пусть для заданных $p = p_0$ и $q = q_0$ существует хотя бы одно r такое, что тройка (p_0, q_0, r) допустима. Докажите, что

- для минимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) либо есть два равных числа, либо одно из чисел равно 0;
- для максимального r такого, что тройка (p_0, q_0, r) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных числа.

b) Лемма о q. Пусть для заданных $p = p_0$ и $r = r_0$ существует хотя бы одно q такое, что тройка (p_0, q, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального q такого, что тройка (p_0, q, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных числа.
c) Лемма о p. Пусть для заданных $q = q_0$ и $r = r_0 > 0$ существует хотя бы одно p такое, что тройка (p, q_0, r_0) допустима. Докажите, что для минимального и максимального p такого, что тройка (p, q_0, r_0) допустима, в соответствующей тройке (a, b, c) есть два равных числа. Останется ли утверждение верным, если $r_0 = 0$?

В чём же идея метода? Пусть дано симметрическое неравенство от трёх переменных. Сведём его к симметрическому неравенству от p, q, r. Зафиксируем два из чисел p, q, r и минимизируем/максимизируем оставшееся число. Тогда исходное неравенство сведётся к неравенству от двух переменных.

Пример. Для неотрицательных чисел a, b, c докажем неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Перепишем его в виде $p^2-2q \geqslant q \Leftrightarrow p^2 \geqslant 3q$. Зафиксируем, к примеру, значения $p=p_0$ и $r=r_0$. Теперь надо доказать неравенство $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$, то есть показать, что q ограничено сверху некоторой константой. Заметим, что если мы докажем неравенство для максимального q, то оно будет верно для всех q. По лемме о q максимальное значение q достигается, когда какие-нибудь из переменных a, b, c равны. Без ограничения общности, $a=b=x$, $c=z$. Поскольку неравенство $q \leqslant \frac{p_0^2}{3}$ равносильно исходному, то после подстановки в исходное неравенство получим

$$2x^2+z^2 \geqslant x^2+2xz \Leftrightarrow (x-z)^2 \geqslant 0,$$

что верно. Следовательно, неравенство верно для всех положительных чисел a, b, c.

4. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Докажите, что $(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8$.

5. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a+b+c=1$. Докажите, что $1+12abc \geqslant 4(ab+bc+ca)$.

6. Для неотрицательных a, b, c докажите неравенство

$$a^5+b^5+c^5+abc(ab+bc+ca) \geqslant a^2b^2(a+b)+b^2c^2(b+c)+c^2a^2(c+a).$$

7. Известно, что a, b, $c \geqslant 0$ и $a+b+c=3$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca} \geqslant \frac{2}{1+abc}.$$

8. **a)** Пусть P — симметрический многочлен от трёх переменных не более чем пятой степени. Докажите, что если $P(a,a,c) \geqslant 0$ и $P(0,b,c) \geqslant 0$ для всех неотрицательных чисел a, b, c, то $P(a,b,c) \geqslant 0$ для любых неотрицательных чисел a, b, c.
b) Дан однородный симметрический многочлен $P(a,b,c)$ степени не выше 8. Приведите алгоритм проверки того, что он принимает только неотрицательные значения при неотрицательных значениях переменных. Можно считать, что мы умеем находить нули и экстремумы любой функции одной переменной.