

Усреднение

1. В классе 21 ученик. Каждый день какие-то пары из них жмут друг другу руки, а какие-то — нет. Известно, что всего за месяц было совершено 2020 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из шестерых человек так, чтобы между ребятами из этой группы было совершено не менее 144 рукопожатий.
2. Во взводе 10 человек. В каждый из 100 дней какие-то четверо назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 14 раз.
3. Есть два ожерелья, в каждом из которых по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Ксюша хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое наибольшее число совпадающих бусинок Ксюша может гарантированно получить?
4. В таблице 20×20 в каждой клетке лежит пончик или крендель, причём в каждом столбце лежит ровно 10 пончиков. Докажите, что найдутся две строки, у которых в пересечении с хотя бы 10 столбцами лежит одно и то же.
5. Дан граф на 12 вершинах. Докажите, что можно покрасить какие-то две его вершины в синий цвет и еще пять вершин — в красный цвет так, что каждая красная либо соединена ребром с обеими синими, либо не соединена ни с одной из них.
6. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые несколько из них перевести вперёд. Для каждого часа время, на которое при этом их перевели, назовём *временем перевода*. Требуется установить все часы так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?
7. На столе у учителя стоят весы. На весах стоят гири не обязательно одинакового веса, на каждой из которых написаны фамилии одного или нескольких учеников, причём одна из чаш перевешивает. Ученик, входя в класс, переставляет на другую чашу весов все гири, на которых написана его фамилия. Докажите, что можно последовательно впустить в класс нескольких учеников таким образом, чтобы в результате перевесила не та чаша весов, которая перевешивала вначале.