

Инверсия – 2

Определение. Углом между двумя кривыми называется наименьший из углов между касательными к этим кривым в их общей точке.

Обобщённой окружностью будем называть окружность или прямую.

Факт. При инверсии угол между обобщёнными окружностями сохраняется.

1. Дан четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD .
2. Дана окружность ω и точка A . Докажите, что все окружности, ортогональные ω и проходящие через точку A , проходят через ещё одну фиксированную точку.
3. (а) Докажите, что для двух произвольных непересекающихся окружностей существует инверсия, которая переводит их в концентрические окружности.
(б) *Поризм Штейнера.* Рассмотрим две непересекающиеся окружности S_1 и S_2 (S_1 лежит внутри S_2). Для произвольной окружности ω_1 , касающейся их обеих (S_1 — внешним образом, S_2 — внутренним), построим цепочку касающихся окружностей по следующему правилу — для каждого $i > 1$ окружность ω_i такова, что она касается S_2 (внутренним образом), S_1 и ω_{i-1} (внешним образом). Пусть цепочка замкнулась за n шагов, то есть ω_n касается ω_1 . Докажите, что тогда для любой начальной окружности ω_1 цепочка замкнется за n шагов.
4. Пусть точки A и B переходят друг в друга при инверсии относительно окружности ω . Рассмотрим некоторую инверсию, которая переводит окружность ω в окружность ω' , а точки A и B — соответственно в точки A' и B' . Докажите, что точки A' и B' переходят друг в друга при инверсии относительно окружности ω' .
5. Окружность ω_A проходит через точки A и C ; окружность ω_B проходит через точки B и C ; центры обеих окружностей лежат на прямой AB . Окружность ω касается окружностей ω_A и ω_B (обеих окружностей либо внешним, либо внутренним образом), а кроме того, она касается прямой AB в точке C_1 . Докажите, что CC_1 — внутренняя или внешняя биссектриса треугольника ABC .
6. (а) Пусть пары точек A и A_1 , B и B_1 инверсны относительно окружности с центром O и радиусом R . Докажите, что $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.
(б) *Неравенство Птолемея.* Докажите, что в любом выпуклом четырёхугольнике сумма произведений противоположных сторон больше либо равна произведению его диагоналей, причём равенство достигается только когда четырёхугольник вписанный.

7. Пусть P — точка внутри треугольника ABC такая, что

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Докажите, что биссектрисы углов ABP и ACP пересекаются на прямой AP .