# Симметрические многочлены

**Определение.** Многочлен от $n$ переменных называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке переменных.

Примеры симметрических многочленов:

- $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$;
- $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2$;
- *Элементарные симметрические многочлены:* $\sigma_k = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.

**Основная теорема о симметрических многочленах.** *Любой симметрический многочлен можно единственным образом представить, как многочлен от элементарных симметрических многочленов.*

**1.** Выразите через элементарные симметрические многочлены
**(a)** $(a+b)(b+c)(c+a)$; **(b)** $(ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2$;
**(c)** $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$.

**2.** Пусть дан симметрический многочлен от $n$ переменных $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Рассмотрим все его одночлены. Назовем одночлен $ax_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ *старшим*, если упорядоченный набор степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ мажорирует все остальные наборы относительно лексикографического порядка.
**(a)** Докажите, что старший одночлен произведения двух многочленов равен произведению старших одночленов сомножителей.
**(b)** Докажите, что для любого одночлена

$$q = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n} \quad (\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n)$$

существуют такие неотрицательные целые числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, что старший член многочлена $\sigma_1^{\beta_1}\sigma_2^{\beta_2}\ldots\sigma_n^{\beta_n}$ совпадает с $q$, причём эти числа определены однозначно.
**(c)** Докажите основную теорему о симметрических многочленах.

**3.** **(a)** Алексей Вадимович загадал три числа, после чего сообщил Виктору Дмитриевичу их сумму, сумму квадратов и сумму кубов. Сможет ли Виктор Дмитриевич восстановить исходные числа?
**(b)** А Дмитрию Александровичу Алексей Вадимович сообщил сумму чисел, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. Сможет ли Дмитрий Александрович восстановить исходные числа?

**( c* )** А если Алексей Вадимович загадает $n$ чисел и сообщит их сумму, сумму их квадратов, сумму кубов, ..., сумму $n$-ых степеней?

**4.** **( a )** Пусть $x_1$, $x_2$, $x_3$ — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$ (возможно, комплексные, не отбязательно различные). Выразите через $p$ и $q$ число

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2.$$

Таким образом получается необходимое и достаточное условие на коэффициенты $p$ и $q$, при котором многочлен $x^3 + px + q$ имеет кратный корень.

**( b )** Найдите необходимое и достаточное условие на коэффициенты $p$ и $q$, при котором уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три действительных корня (возможно, кратных).

**5.** Многочлен $x^{1000}+y^{1000}$ выразили через элементарные симметрические, как $P(x + y, xy)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P$.

**6.** Клетки таблицы $3 \times 3$ заполнены действительными числами так, что суммы чисел в строчках равны между собой и равны суммам чисел в столбцах. Докажите, что сумма произведений чисел по строчкам равна сумме произведений чисел по столбцам.