

Инверсия

Инверсией с центром в точке O и радиусом R называется преобразование, которое каждую точку A , отличную от O , переводит в точку A' на луче OA , причем $|OA| \cdot |OA'| = R^2$.

1. Пусть при инверсии с центром в точке O точки A и B переходят в точки A' и B' соответственно. Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.
2. Докажите, что при инверсии с центром в точке O
 - (а) прямая, проходящая через O , переходит в себя;
 - (б) окружность, проходящая через O , переходит в прямую, не проходящую через центр;
 - (с) прямая, не проходящая через O , перейдет в окружность, проходящую через O ;
 - (d) окружность, не проходящая через O , перейдет в окружность, не проходящую через O .
3. Докажите, что при инверсии касающиеся окружности (прямая и окружность) переходят в касающиеся окружности, или в касающиеся окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.
4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Докажите, что при инверсии относительно точки A с радиусом AB дуга BC описанной окружности треугольника ABC перейдет в отрезок BC .
5. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ таковы, что ω_1 и ω_3 касаются каждой из окружностей ω_2 и ω_4 внешним образом. Докажите, что 4 точки касания лежат на одной окружности.
6. В сегмент окружности вписываются пары касающихся внешним образом окружностей. Найдите ГМТ точек касания.
7. Через точку A к окружности ω с центром O проведены касательные $AХ$ и $AУ$, а также секущая, пересекающая окружность в точках Z и T . Докажите, что точки Z, T, O и середина $ХУ$ лежат на одной окружности.