Лексикографический порядок

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A мажорирует B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

1. Докажите, что

- если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$;
- строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна;
- в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы можем упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикограическим.*

2. Компьютер сортирует массив из 1000 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

3. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x \cdot (p-1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

4. Каюты на лайнере расположены ввиде куба $20 \times 20 \times 20$, причём в каждой живёт ровно по одному пассажиру. Некоторые пассажиры больны. Время от времени кто-то из больных пассажиров либо заражает здорового пассажира из соседней каюты, либо выздоравливает. Вентиляция устроена таким образом, что болезнь не передается снизу вверх, справа налево и спереди вглубь. Кроме того, известно, что у каждого больного пассажира болезнь рано или поздно закончится (но он в дальнейшем может заразиться вновь). Докажите, что рано или поздно все пассажиры поправятся.

5. Сборная Москвы с 1993 года ежегодно участвует в финале Всероссийской олимпиады школьников по математике, которая проводится по параллелям 9, 10, 11 класса. Год N считается *провальным*, если для каждого предыдущего года M существует параллель, по которой в год N сборная Москвы взяла меньше дипломов, чем в год M. Могут ли все годы участия, начиная с 1994, быть провальными (в том числе и в будущем)?

6. На доске написана последовательность из n символов: крестиков и ноликов. Двое играют в следующую игру. За один ход разрешается взять любые k

($k = 1, \ldots, n$) подряд идущих знаков таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ним — нолики (допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик, а нолики на крестики). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

7. 1000 монет разложены на 10 куч. Играют двое. Первый своим ходом выбирает 4 кучи и делит каждую из них на правую и левую (возможно, пустые). После этого второй нетождественно переставляет левые кучи и соединяет их с правыми обратно. В любой момент вместо своего хода первый может забрать любые три кучи и прекратить игру. Какое наибольшее число монет может гарантировать себе первый?