Отборочная олимпиада

1. Контур некоторого квадрата состоит из шести прямых палочек. Всегда ли из этих шести палочек можно сложить два треугольника?

2. Множество S состоит из 100 натуральных чисел. Известно, что для любых натуральных x и y (не обязательно различных и не обязательно принадлежащих S), сумма которых принадлежит S, хотя бы одно из чисел x или y тоже принадлежит S. Какое максимальное значение может принимать сумма всех чисел множества S?

3. На доске написано несколько натуральных чисел. За одну операцию можно выбрать произвольное число x с доски и заменить его на $\frac{M}{x}$, где M — НОК всех чисел, записанных на доске (включая x). Докажите, что за несколько таких операций все числа на доске можно сделать равными 1.

4. Алиса и Вова по очереди выписывают числа, начинает Алиса. На очередном шаге можно выписать 0, 1 или 2, причём нельзя выписать то, что соперник выписал на только что сделанном шаге. После того, как каждый из ребят сделает по 2020 шагов, игра закончится. Вова хочет добиться того, чтобы сумма чисел в конце была кратна трём, а Алиса стремится ему помешать. Сможет ли Алиса гарантированно помешать Вове?

5. В последовательности x_n для всех натуральных $n \geqslant 1$ выполнено соотношение

$$x_{n+1}^3 = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n\,.$$

Чему может быть равен x_1, если $x_{100} = x_{1000}$?

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки E и F симметричны точке A относительно середин сторон BC и CD. Описанная окружность треугольника CEF вторично пересекает ω в точке X. Докажите, что AX — диаметр ω.

Личная письменная олимпиада. Продолжительность — 180 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 7 баллов.