10-1	Гауссовы числа	17 мая 2021

Определение 1. Комплексное число $a+bi$ называют *целым гауссовым*, если a и b — целые числа. Его *нормой* называют целое неотрицательное число $||(a+bi)|| = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$.

Определение 2. Целое гауссово число u *кратно* целому гауссову числу v, если существует такое целое гауссово число w, что $u = vw$.

Определение 3. Целое гауссово число u называется *обратимым* (или *делителем единицы*), если существует целое гауссово число v такое, что $uv = 1$.

Определение 4. Все гауссовы числа делятся на делители единицы, поэтому любое гауссово число, отличное от делителей единицы, имеет как минимум следующие делители: делители единицы и их произведения на само это число. Такие делители называются *тривиальными*.

Определение 5. *Простое целое гауссово число* — это ненулевое число, не имеющее других делителей, кроме тривиальных. Число, не являющееся простым, называется *составным*.

1. Докажите, что если a и b взаимно просты, то наименьшее натуральное число, которое делится на $a+bi$, равно a^2+b^2.

2. а) Найдите все целые гауссовы обратимые числа.
б) Докажите, что для целых гауссовых чисел возможно деление с остатком, т.е. для любых $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ $(b \neq 0)$ найдутся $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ такие, что $a = bq + r$ и $||r|| < ||b||$.
в) Докажите, что любое гауссово число, отличное от делителей единицы, единственным образом (с точностью до порядка сомножителей и умножения их на делители единицы) раскладывается в произведение простых гауссовых.

3. Докажите, что никакое простое число не может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел существенно разными (т. е. не получающимися один из другого перестановкой слагаемых) способами.

4. а) Докажите, что простое число p либо является простым гауссовым числом, либо представляется в виде $z\overline{z}$, где $z = a + bi$.
б) Докажите, что простое число число вида $4k+3$ является простым гауссовым.
в) Докажите, что для простого $p = 4k+1$ существует m, что m^2+1 делится на p.
г) Докажите, что p из предыдущего пункта представляется в виде произведения двух сопряженных простых целых гауссовых чисел.

Итог. Все простые числа вида $4k+1$ и 2 раскладываются в сумму двух квадратов, а простые числа вида $4k+3$ — нет.

5. Рождественская теорема Ферма. Какие натуральные числа представляются в виде суммы двух квадратов?

6. Пусть $m = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где все простые числа p_i различны и и меют вид $4k+1$, а все числа α_i нечётны. Докажите, что количество представлений числа m в виде $a+b$, где a и b — точные квадраты, равно $(\alpha_1+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_r+1)$.

7. Дано простое целое гауссово p. Какое наибольшее количество различных целых гауссовых чисел можно взять так, чтобы разность любых двух не делилась на p?

8. Решите в целых числах уравнение **а)** $x^2+1 = y^3$; **б)** $x^2+4 = y^3$.