

1. Какое наибольшее количество прямых можно выбрать на плоскости так, чтобы среди любых 15 из них какие-то две пересекались под углом  $60^\circ$ ?

2. Есть колода из 1024 карточек, на каждой из которых написан набор различных цифр от 0 до 9, причём все наборы различны (в частности, есть и пустая карточка). Назовём набор карточек *полным*, если на них каждая цифра от 0 до 9 встречается ровно по разу. При каких  $k$  существует набор из  $k$  карточек таких, что среди них нельзя выбрать полный набор, но при добавлении любой карточки из колоды это условие нарушается?

3. Точка  $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , а  $T$  — точка касания этой окружности со стороной  $AC$ . Пусть  $P$  и  $Q$  — ортоцентры треугольников  $BAI$  и  $BCI$  соответственно. Докажите, что точки  $T$ ,  $P$ ,  $Q$  лежат на одной прямой.

4. Возрастающая последовательность натуральных чисел  $a_1 < a_2 < \dots$  такова, что при каждом целом  $n > 100$  число  $a_n$  равно наименьшему натуральному числу, большему чем  $a_{n-1}$  и не делящемуся ни на одно из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Докажите, что в такой последовательности лишь конечное количество составных чисел.

5. Полиция задержала 50 человек, из которых 35 — преступники, которые говорят, что захотят, а 15 — свидетели, которые всегда говорят правду. Все задержанные знают, кто преступники. Какое наименьшее число человек достаточно выбрать, чтобы, спросив потом у каждого, кто именно преступники, по ответам вычислить хотя бы одного преступника?

6. Положительные  $a, b, c$  таковы, что  $(a-b) \ln c + (b-c) \ln a + (c-a) \ln b = 0$ . Докажите, что  $(a-b)(b-c)(c-a) = 0$ .

7. Существует ли описанный 2021-угольник, все вершины и центр вписанной окружности которого имеют целочисленные координаты?

8. Есть 120 внешне неразличимых пробирок, в 118 из которых находится нейтральное вещество, в одной — яд и в одной — противоядие. Можно воспользоваться услугами внешней тестирующей лаборатории, в которую одновременно отправляют несколько смесей из любого числа пробирок (по одной капле из пробирки), и для каждой смеси лаборатория сообщит результат:  $+1$ , если в смеси есть яд и нет противоядия;  $-1$ , если в смеси есть противоядие, но нет яда;  $0$  в остальных случаях. Можно ли, подготовив 19 таких смесей и послав их в лабораторию единой посылкой, по результатам гарантированно понять, в какой пробирке яд, а в какой противоядие?