Олимпиада

1. Действительные числа x, y и z таковы, что $x^2+y = y^2+z = z^2+x$. Докажите, что

$$x^3 + y^3 + z^3 = xy^2 + yz^2 + zx^2.$$

2. В квадрате 1×1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная (возможно, самопересекающаяся), проходящая через все точки, длина которой не больше $2n + 1$.

3. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что существует такое натуральное число c, что любая ненулевая цифра в десятичной записи числа cm встречается столько же раз, сколько и в десятичной записи числа cn.

4. Дан треугольник ABC. Найдите все точки P на стороне BC, удовлетворяющие следующему условию.
Пусть X и Y — точки пересечения прямой PA и общих внешних касательных к описанным окружностям треугольников PAB и PAC. Тогда

$$\left(\frac{PA}{XY}\right)^2 + \frac{PB \cdot PC}{AB \cdot AC} = 1.$$