10-1	Разнобой	5 апреля 2021

1. Даны натуральные числа m, n, x. Докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, m\right) = \sum_{i=1}^{m} \min\left(\left\lfloor \frac{x}{i} \right\rfloor, n\right).$$

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что $a^2 - bc$ — точный квадрат. Докажите, что число $2a + b + c$ — составное.

3. Треугольник ABC вписан в окружность ω. Окружность с хордой BC пересекает отрезки AB и AC второй раз в точках S и R соответственно. Отрезки BR и CS пересекаются в точке L, а лучи LR и LS пересекают ω в точках D и E соответственно. Внутренняя биссектриса угла BDE пересекает прямую ER в точке K. Оказалось, что $BE = BR$. Докажите, что $\angle ELK = \frac{1}{2}\angle BCD$.

4. Найдите все пары натуральных чисел (m, n), для которых клетчатый прямоугольник $m \times n$ можно раскрасить в несколько цветов так, чтобы у любой клетки было ровно 2 соседа по стороне её же цвета.

5. Даны натуральные числа r и s. Определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, и $a_n = ra_{n-1} + sa_{n-2}$ для $n \geqslant 2$. Пусть $f_n = a_1 a_2 \cdots a_n$. Докажите, что число $\dfrac{f_n}{f_k f_{n-k}}$ является целым для всех целых n и k таких, что $0 < k < n$.

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c = \sqrt[7]{a} + \sqrt[7]{b} + \sqrt[7]{c}$. Докажите, что $a^a b^b c^c \geq 1$.

7. Назовём натуральное число *красивым*, если оно представляется в виде a^n, где $a \in \{3, 4, 5, 6\}$, а n — какое-то натуральное число. Докажите, что любое натуральное число, большее 2, можно представить в виде суммы нескольких различных красивых чисел.