

1. Существуют ли два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $P - Q$, P и $P + Q$ — квадраты некоторых многочленов с действительными коэффициентами, причём Q не получается из P умножением на число?
2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b . Прямая H_aH_b пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Точка A_0 симметрична точке A относительно BC , точка B_0 симметрична точке B относительно AC . Докажите, что точки A_0 , B_0 , P и Q лежат на одной окружности.
3. На клетчатой бумаге выложен из спичек квадрат $2n \times 2n$ со всеми внутренними перегородками и внешним контуром (длина спички равна 1). За один ход можно выбрать узел, из которого в данный момент исходят 3 или 4 спички, и убрать либо две горизонтальные, либо две вертикальные спички, выходящие из этого узла. Какое наименьшее количество спичек может остаться после некоторого количества таких ходов?
4. Для числа p последовательность $\{a_k\}$ определяется следующими условиями: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k - pa_{k-1}$ для всех натуральных k . Найдите все простые p , при которых в этой последовательности встретится число -1 .