10-1 | Разнобой | 29 марта 2021

1. Дано натуральное $n \geqslant 4$. Сколько существует способов триангулировать выпуклый n-угольник так, чтобы никакие три диагонали не образовывали треугольник?

2. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA', BB', CC'. На отрезке $A'B'$ нашлись точки P и Q такие, что $C'P \perp A'B'$ и $AQ = BQ$. Докажите, что $\angle PAQ = \angle PBQ = \angle PC'C$.

4. Шесть членов команды Танзании на Международной математической олимпиаде отбираются из 13 кандидатов. На отборочной олимпиаде кандидаты набрали $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ баллов ($a_i \neq a_j$ при $i \neq j$). Руководитель команды заранее выбрал 6 кандидатов и теперь хочет, чтобы в команду попали именно они. С этой целью он подбирает многочлен $P(x)$ и вычисляет *творческий потенциал* каждого кандидата по формуле $c_i = P(a_i)$. При каком наименьшем n он заведомо сможет подобрать такой многочлен $P(x)$ степени не выше n, что творческий потенциал любого из его шести кандидатов окажется строго больше, чем у каждого из семи оставшегося?

5. Дано натуральное $a > 1$. Докажите, что существует лишь конечное число троек натуральных чисел (x, y, z) таких, что $a^x - a^y = z!$.

6. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$. Прямая l проходит через вершину A, пересекает отрезок BC в точке M и луч DC — в точке N. Пусть I_1, I_2, I_3 — центры окружностей, вписанных в треугольники ABM, MNC, NDA соответственно. Докажите, что прямая l проходит через ортоцентр треугольника $I_1I_2I_3$.

7. Андрей и Влад играют в игру на бесконечной клетчатой плоскости, делая ходы по очереди; Андрей ходит первым. Ход состоит в том, чтобы ориентировать любой единичный отрезок сетки клетчатой плоскости, не ориентированный ранее. Если в какой-то момент несколько ориентированных отрезков образуют ориентированный цикл, то Влад выигрывает. Если ли у Влада выигрышная стратегия?