

Линейное движение точек – 2

Утверждение. Если три линейно движущиеся точки лежат на одной прямой в три различных момента времени, то они всегда лежат на одной прямой.

Вопрос. Точки A , B , C движутся линейно. Сколько различных момента времени достаточно проверить, чтобы утверждать, что $\angle(AB, AC) = \alpha$ для фиксированного угла α ?

- (а) *Прямая Гаусса.* На плоскости проведено четыре прямых общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.

(б) На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 перпендикулярна прямой, соединяющей середины отрезков BC_1 и B_1C . Выведите отсюда существование прямой Обера (*ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса этих четырёх прямых*).
- Через вершины B и C треугольника ABC проводится окружность, которая второй раз пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Пусть H и H_1 — ортоцентры треугольников ABC и AB_1C_1 . Докажите, что прямые BB_1 , CC_1 , HH_1 пересекаются в одной точке.
- Из ортоцентра H треугольника ABC опущены перпендикуляры на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B . Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Покажите, что PQ делит сторону AC пополам.
- На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки X и Y соответственно. Прямая XY пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что середины отрезков BY , CX , XY и PQ лежат на одной окружности.
- Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника, лежат на одной прямой.