Линейное движение точек

Определение. Скажем, что фигура (точка, отрезок, прямая и т.д.) движется *линейно*, если существует такой вектор $\vec{v}$, что за время t каждая точка фигуры смещается на вектор $t \cdot \vec{v}$.

1. Верно ли, что линейно движется

(a) середина отрезка, концы которого движутся линейно;

(b) прямая постоянного направления, проведённая через линейно движущуюся точку;

(c) прямая, две точки которой движутся линейно;

(d) точка пересечения двух прямых, которые движутся линейно?

2. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

3. На сторонах BC и CD ромба $ABCD$ выбраны точки M и N такие, что $BM = CN$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AMN лежит на отрезке BD.

4. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB, AC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $\angle AB_1M = \angle AC_1M$. Докажите что перпендикуляры, восстановленных из точек B_1, C_1, M к сторонам треугольника, на которых они лежат, пересекаются в одной точке.

5. Вневписанные окружности касаются сторон AB, AC треугольника ABC в точках C_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая середины BC и B_1C_1, параллельна биссектрисе угла A.

6. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На луче AO выбрана произвольная точка P. Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают прямые AC и AB в точках B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что середина B_1C_1 равноудалена от точек B и C.

7. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок AB и прямую AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BP и CQ лежат на одной окружности.

8. Через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника провели прямые, параллельные биссектрисам соответствующих углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

9. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.